ИСТОРИЯ И МЕТОДОЛОГИЯ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Лекция 3:
Математика Древней Греции

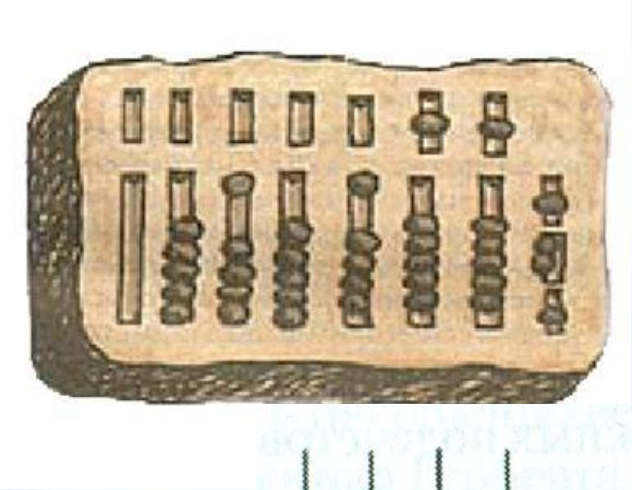
ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, Кафедра АСВК
к.ф.-м. н., ассистент Волканов Д.Ю.

План лекции

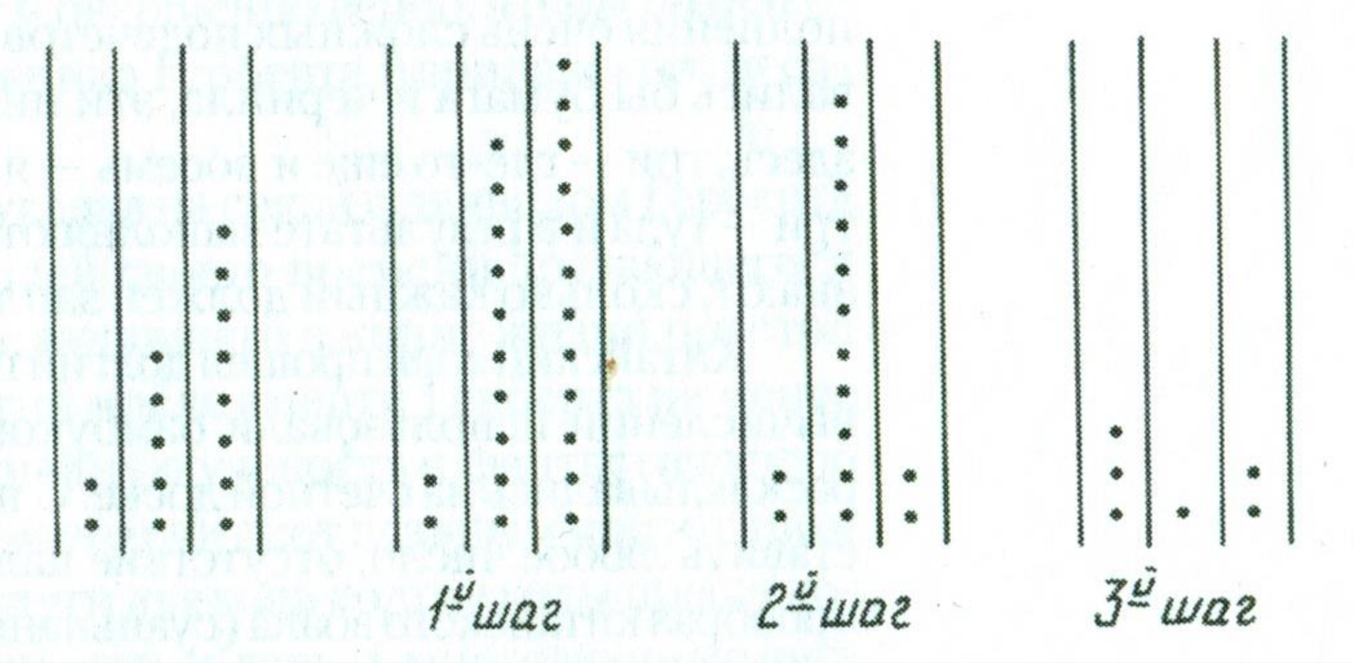
- Милетская школа
- Пифагорейская школа
- Атомисты
- Афинская школа
- Евклид
- Матемаики позднего эллинизма

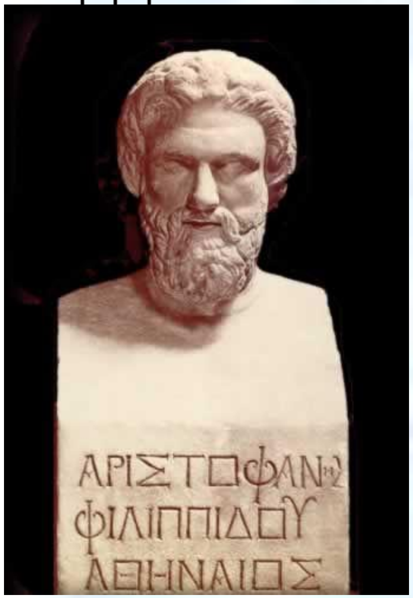
ГРЕЧЕСКАЯ КОЛОНИЗАЦИЯ В VIII-VI вв. до н.э.

Абак (греч. abax, abakion, латинский abacus - доска, счётная доска)



«Придворные как камни на счетной доске; захочет счетчик, и они будут стоит один халк, а захочет – так и целый талант» (Полибий, II в до н.э.)





Разочти-ка сперва приблизительно мне – не на счетах, а просто на пальцах,
Сколько подати к нам ото всех городов, если всё сосчитать, поступает,
Да прибавь-ка сюда все налоги еще да доход двухпроцентный с привоза,
Да с базаров, с суда, рудников, пристаней, да с аренд и за счет конфискаций.
Всех доходов таких приблизительно мы до двух тысяч талантов имеем.
Из доходов теперь для присяжных судей отдели ежегодную плату
Их шесть тысяч всего проживает в стране, больше, как ни трудись, не найдется, –
И выходит, что мы на присяжных судей полтораста талантов издержим.

Аристофан, Осы (конец V – начало IV вв. до н.э.

По свидетельству древнеримского историка Плиния-старшего, на главной римской площади — Форуме была воздвигнута гигантская фигура двуликого бога Януса. Пальцами правой руки он изображал принятое в то время обозначение в Риме числа 300 (соединение большого и указательного в кольцо), пальцами левой руки — 55 (загнут большой и средний). Вместе это составляло число дней в году в римском календаре.

Основные научные школы

Милетская школа. Условные «временные границы» – VI – V вв. до н.э. Ее называют также ионийской школой натурфилософии.

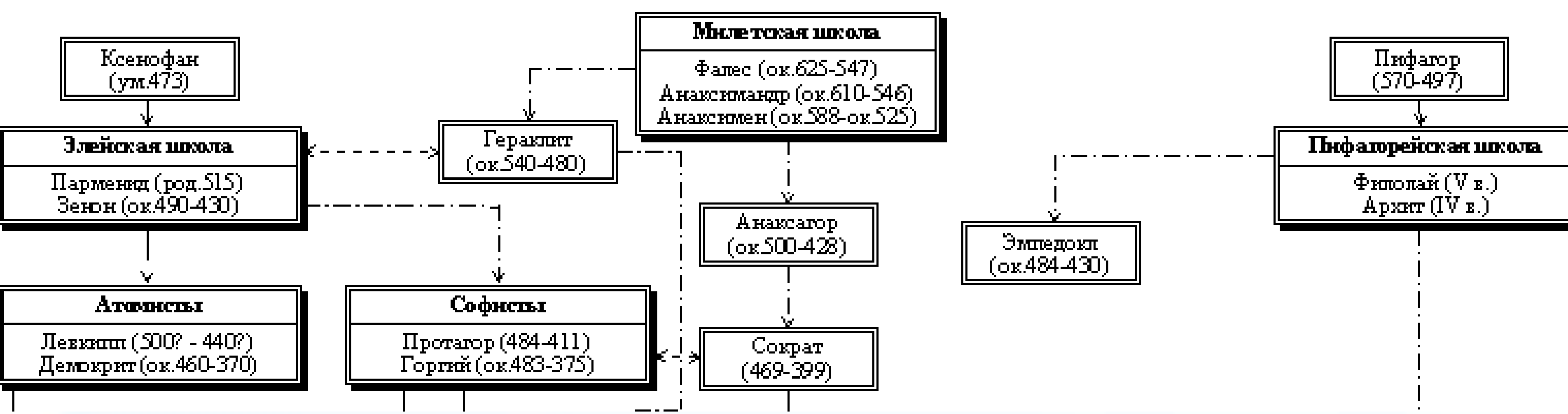
Пифагорейцы (научный центр в Кротоне, городе на территории Южной Италии, возник во второй половине VI в. до н.э.)

Атомисты (V-IV в. до н.э.).

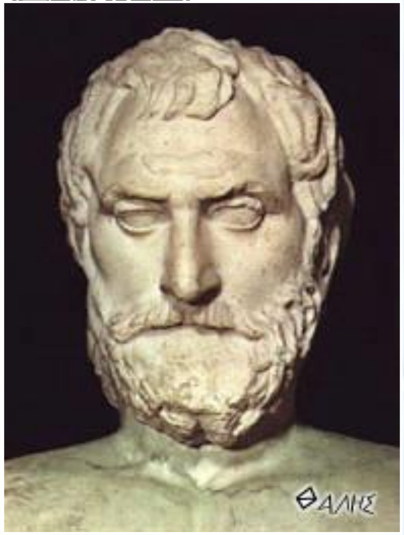
Софисты - своеобразная школа профессиональных странствующих ученых, добывавших средства к существованию в обмен на свои знания.

Элеаты (VI – V вв. до н.э., древнегреческий полис Элея на территории современной Италии). Построение философии на основе логических рассуждений

ОСНОВНЫЕ ШКОЛЫ АНТИЧНОЙ ФИЛОСОФИИ



Милетская школа



Фалес
(624-548 до н.э)

Анаксимандр
(ок. 610 ок.547 до н.э.)

Анаксимен
(ок. 585- ок. 525)

Анаксагор
(ок. 500-428 до н.э

Фалес

❖Первым доказал, что диаметр делит круг пополам

❖Нашел предположение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника

❖Установил, что при пересечении двух прямых получаются равные углы (без док-ва)

❖Обнаружил пропорциональность отрезков, образующихся на прямых, пересеченных параллельными прямыми (т. Фалеса)

❖Сформулировал и доказал теорему о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла (применение к определению расстояния кораблей на море)

Фалес Милетский (конец 7 — начало 6 в. до н. э.). Гравюра XVII в.

«Что на свете трудно?
Что легко?
Что приятнее всего?
Что божественно?
Какая жизнь самая лучшая?
Что быстрее всего?
Что мудрее всего?

Фалес

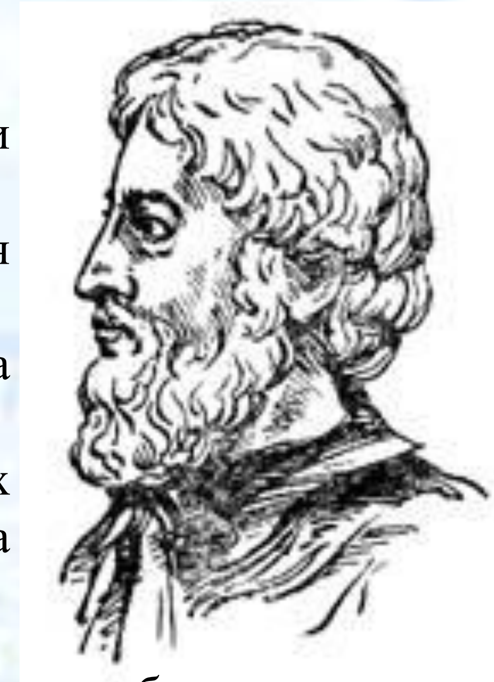
❖Первым доказал, что диаметр делит круг пополам

❖Нашел предположение о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника

❖Установил, что при пересечении двух прямых получаются равные углы (без док-ва)

❖Обнаружил пропорциональность отрезков, образующихся на прямых, пересеченных параллельными прямыми (т. Фалеса)

❖Сформулировал и доказал теорему о равенстве двух треугольников, имеющих равными сторону и два угла (применение к определению расстояния кораблей на море)



«Что на свете трудно? – Познать себя.

Что легко? – Советовать другому.

Что приятнее всего? - Удача.

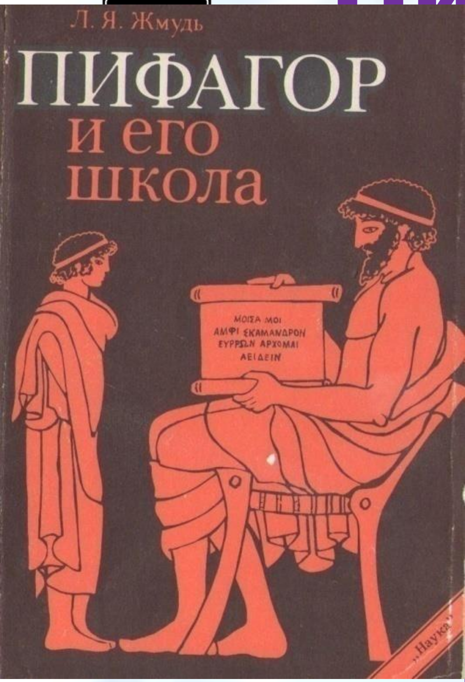
Что божественно? – То, что не имеет ни начала, ни конца.

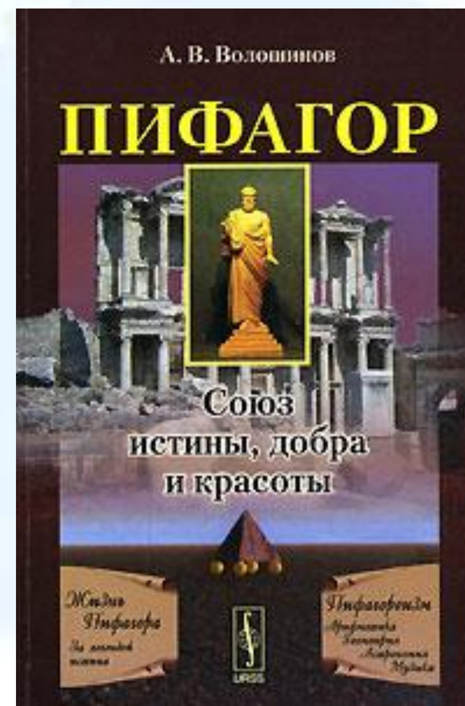
Какая жизнь самая лучшая? – Когда мы не делаем сами того, что осуждаем в других.

Что быстрее всего? – Ум, ибо он обегает всё.

Что мудрее всего? – Время, ибо оно раскрывает всё.»

Пифагорейская школа

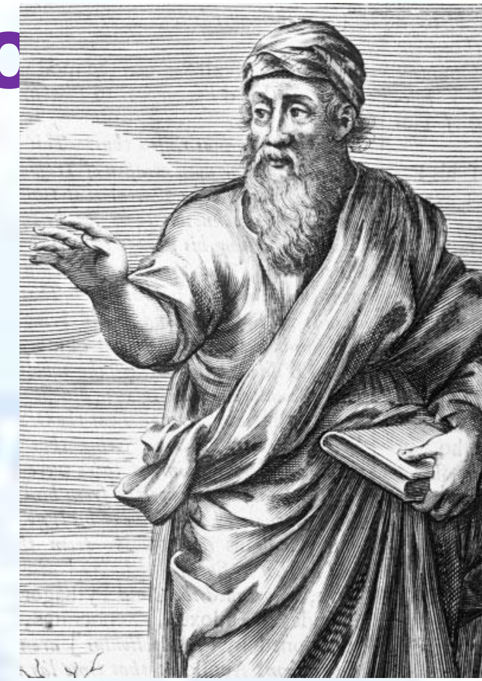


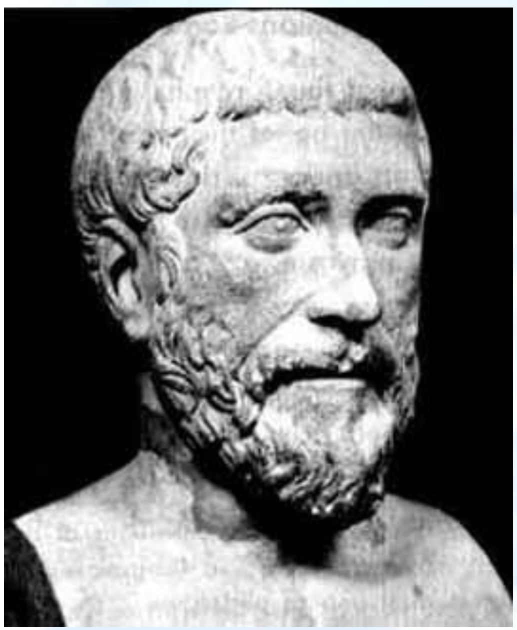


Пифагор (ок.570-ок.500 до н.э.)

«Жил среди них некий муж, умудренный безмерным познаньем,
Подлинно мыслей высоких владевши сокровищем ценным,
В разных искусствах премудрых свой ум глубоко изощривший.
Ибо как скоро всю силу ума напрягал он к познанью,
То без труда созерцал все несчетные мира явленья,
За десять или за двадцать людских поколений провидя»

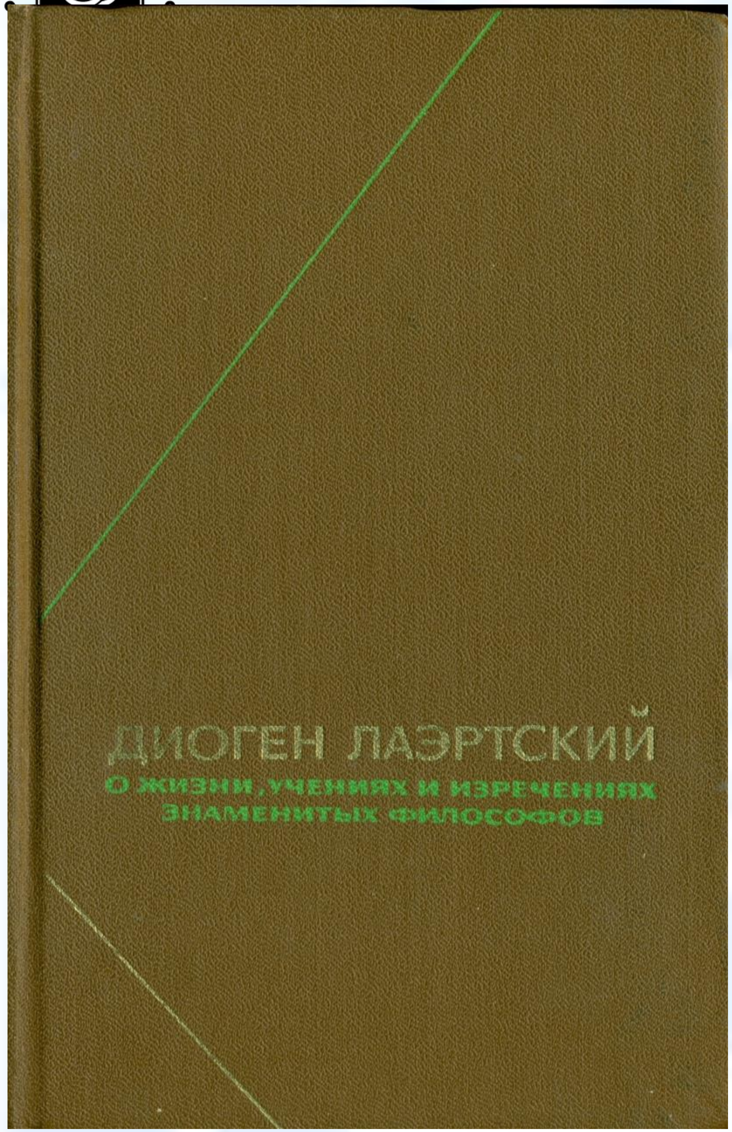
(Эмпедокл)





Пифагор, сын Мнесарха, родился в Самосе, куда переселились из Флиунта его предки. Из неточных и в подробностях часто друг с другом расходящихся показаний можно вывести только то, что он родился около 58-570 г. до н.э., пришел в Италию около 540-530 г. до н.э. и умер к концу VI или в начале V в. до н.э. Гераклит называл его самым многознающим человеком своего времени, но как и откуда он приобрел свои познания – неизвестно.

Пифагор (ок.570-ок.500 до н.э.)



Пифагор (с.307-320)
Порфирий. Жизнь Пифагора (с.416-426)

В Кротоне он «сразу привлек всеобщее уважение как человек, много странствовавший, многоопытный и дивно одаренный судьбою и природой: с виду он был величав и благороден, а красота и обаяние были у него и в голосе, и в обхождении, и во всем» (Порфирий)

«Расцвет его приходится на 60-ю олимпиаду, а установления его держались еще девять или десять поколений – ибо последними из пифагорейцев были те, которых еще застал Аристоксен» (Диоген Лаэртский)
Аристоксен – глава прифагорейцев в 300 г. до н.э.

Бронников Ф.А Гимн пифагорейцев восходящему солнцу. 1869

Треугольные числа

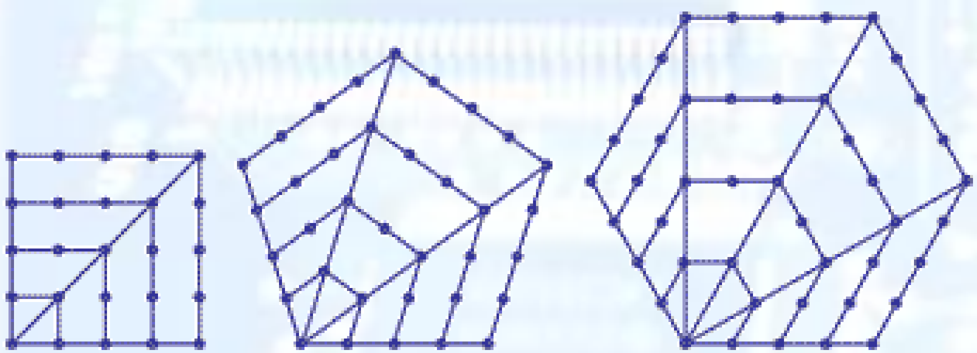
$$T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Квадратные числа

$$K_n = n^2$$

Пятиугольные числа

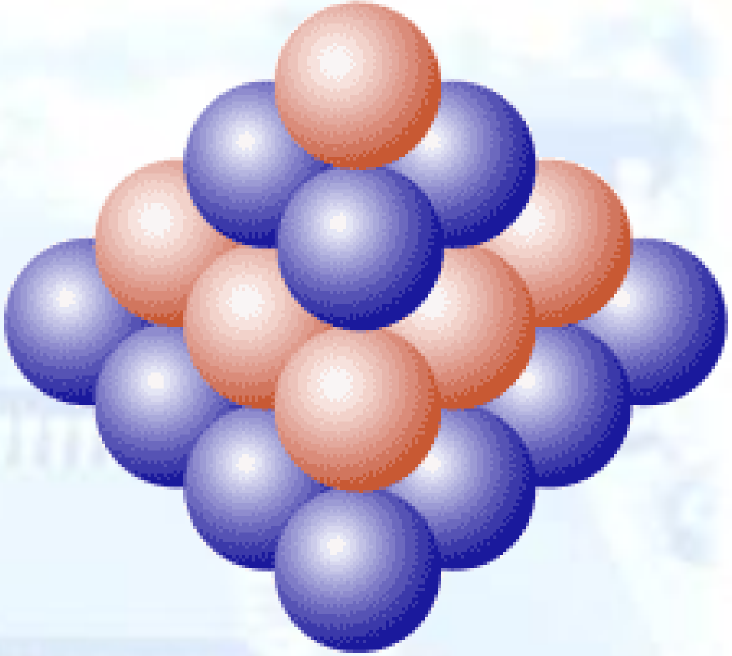
$$П_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$$

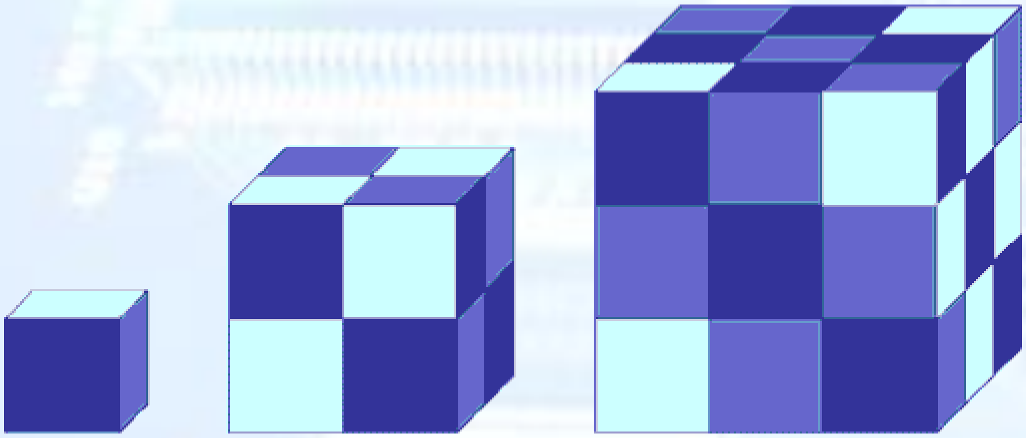


Общая формула n-угольных чисел

$$F_n^{(k)} = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}$$

Пирамидальные числа возникают при складывании круглых камушков горкой так, чтобы они не раскатывались. Получается пирамида. Каждый слой в такой пирамиде - треугольное число. Наверху один камушек, под ним - 3, под теми - 6 и т.д.:
1, 1+3=4, 1+3+6=10, 1+3+6+10=20, ...





Кубические числа возникают при складывании кубиков: **1, 2·2·2=8, 3·3·3=27, 4·4·4=64, 5х5х5=125...** и так далее.

Числа, которые равны сумме всех своих делителей (исключая само число), называют **совершенными**.

6 = 1 + 2 + 3 **28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14**

496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 31 + 62 + 124 +248 **8128 =**

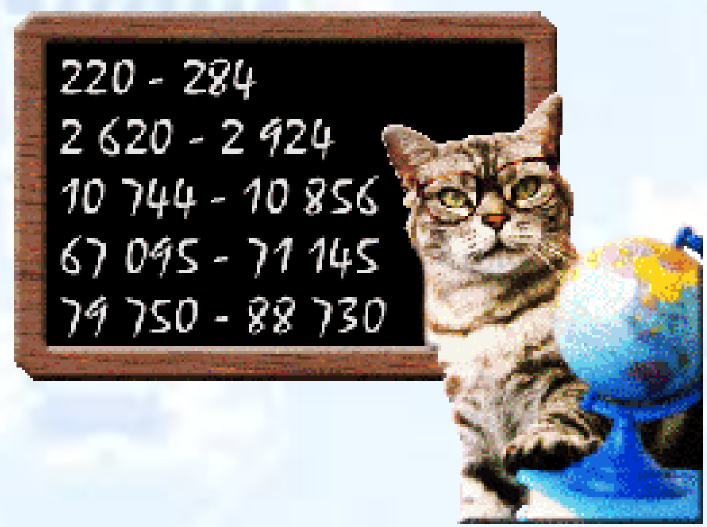
Наибольшее известное сегодня совершенное число - $\mathbf{2^{44496}(2^{44497}-1)}$

$$\text{если } 1+2+2^2+\ldots+2^n = p,\ \text{p простое,}$$

$$\text{то } p2^n = 2^n(2^{\mathrm{n+1}}\text{-}1)\text{ - совершенное}$$

Депман И.Я. Совершенные числа // Квант, 1971, № 8. С. 1-6

Дружественные числа. Пифагор говорил: *«Мой друг тот, кто является моим вторым я, как числа **220** и **284**».* Эти числа замечательны тем, что сумма младших делителей каждого из них равна второму числу. Действительно: **1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284**, а **1+2+4+71+142=220**



Варпаховский А. Тайны совершенных чисел и дружественных пар // Квант, 1973, № 10. С. 71-74

Пифагорейское учение о музыке

Варга Б, Димень Ю., Лопариц Э. Язык. Музыка. Математика. – М.: Мир, 1991
Левшин В. Ноктюрн Пифагора. – М.: Музыка, 1977 . – С.22-29.

В Древней Греции была впервые замечена некая закономерная связь между звуками и математическими величинами. Открытие этих закономерностей связано с именем Пифагора. Согласно его теории, музыка представляла собой некую физическую материю. Были определены основные типы гамм, что позволило упорядочить всю систему музыкальной гармонии на Востоке. Низкие звуки соответствовали Луне, высокие - планете Земля и т.д. Пифагор отмечал также, что количество нот в гамме соответствует количеству планет на небе - и равняется магической цифре 7.

Пифагорейское учение о музыке

Один из первых музыкальных инструментов древних греков – МОНОХОРД, длинный ящик, над которым натягивалась струна. В результате многочисленных опытов были найдены определенные числовые выражения (интервальные коэффициенты) - октава (2/1), квинта (3/2) и кварта (4/3).

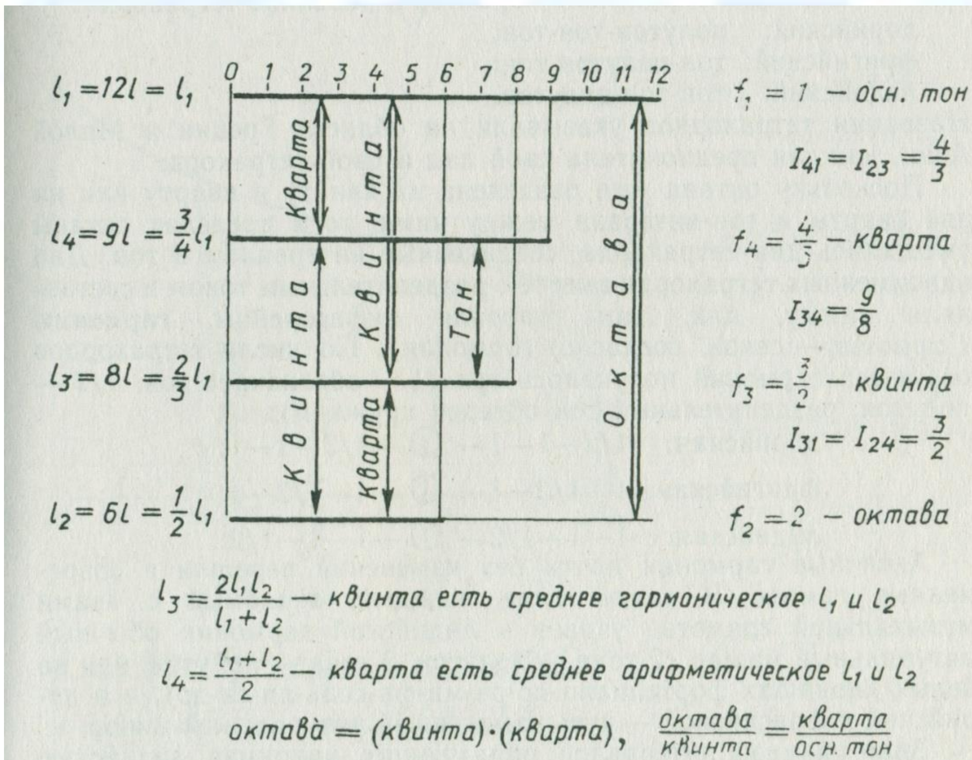
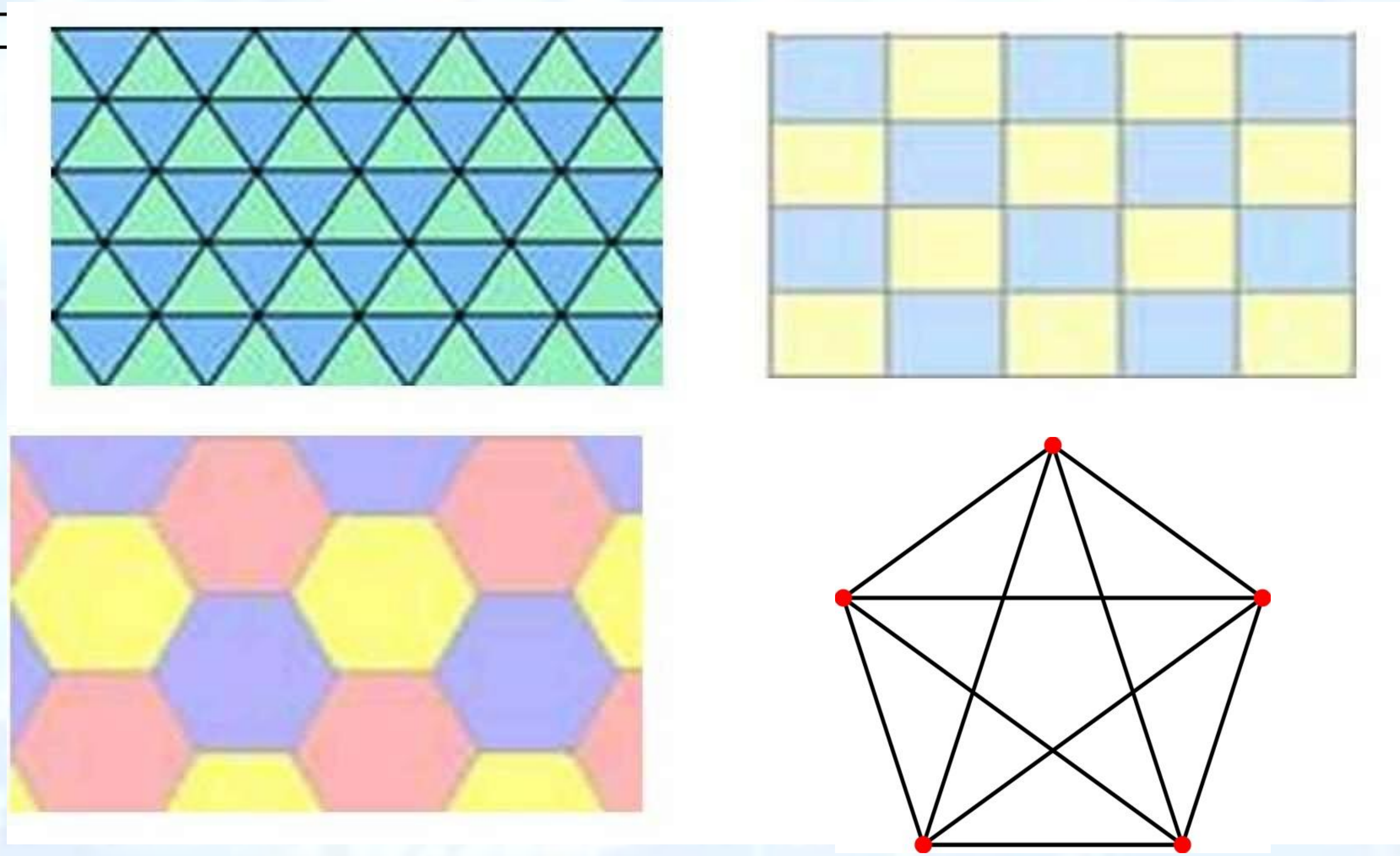


Рис. 75. Деление струны монохорда (l_1) на части, образующие с ней совершенные консонансы: октаву (l_2), квинту (l_3) и кварту (l_4) и соотношения между ними.

Правильные фигуры и тела



1) Плоскость можно сплошь (без дырок и наложений) покрыть тремя видами правильных многоугольников (треугольниками, квадратами, шестиугольниками)
2) Правила построения правильных многоугольников (самое сложное – пятиугольник)
3) Символ пятигорейцев – пятиконечная звезда из трех равнобед. треугольников

Правильные фигуры и тела

Многогранник называется *правильным*, если все его грани - равные между собой правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число граней. Известно только *5 выпуклых правильных многогранников:*
тетраэдр (4 грани, рис.99);
куб (6 граней, рис.100);
октаэдр (8 граней, рис.101);
додекаэдр (12 граней, рис.102);
икосаэдр (20 граней, рис.103).

Пифагорейцы знали только куб, тетраэдр и додекаэдр, остальные открыл Теэтет. «Платоновы тела».

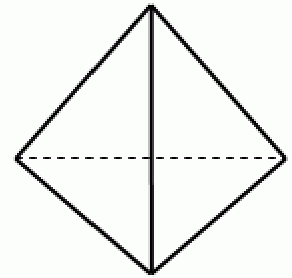


Рис. 99

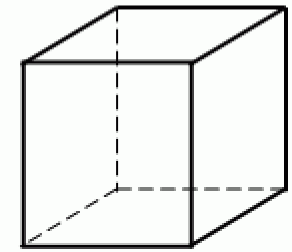


Рис. 100

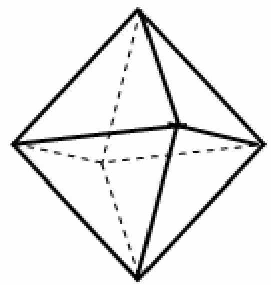


Рис. 101

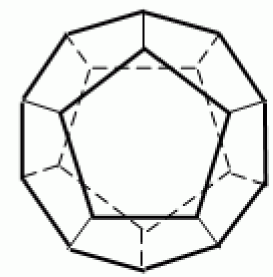


Рис. 102

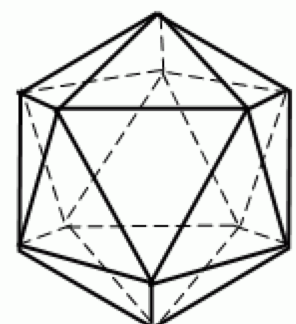
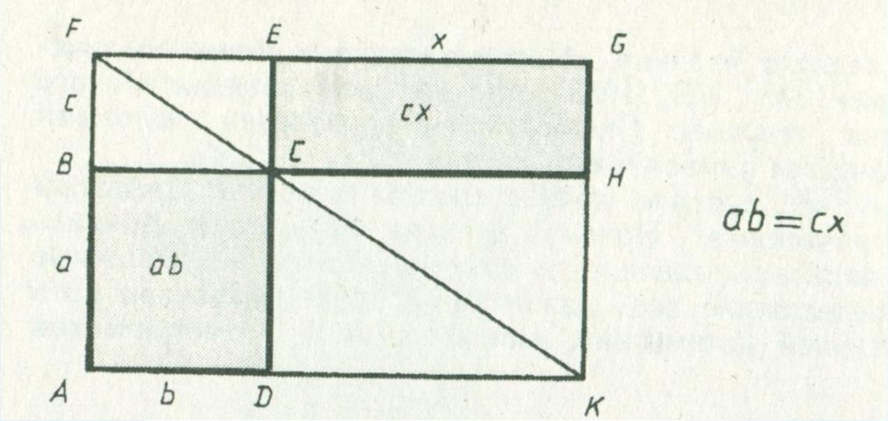
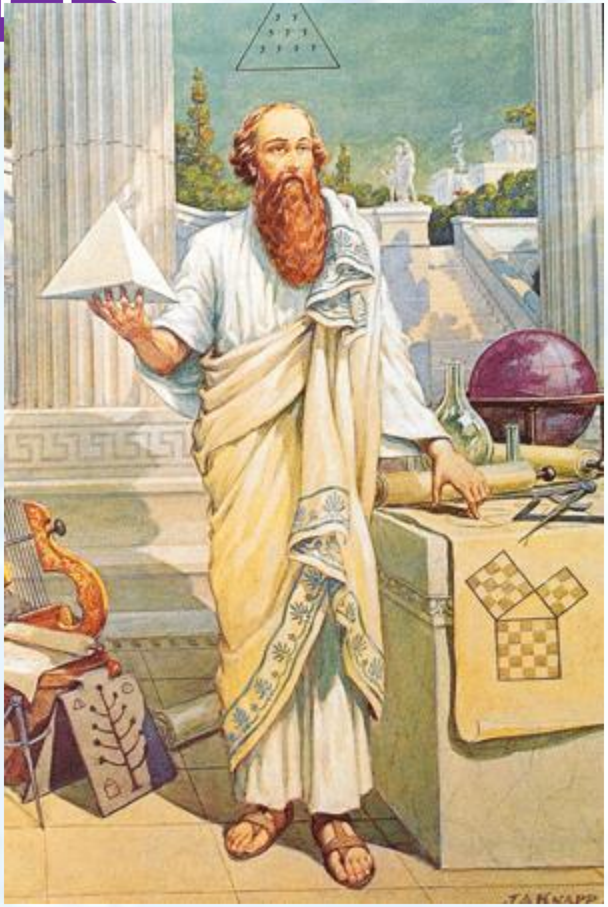


Рис. 103

Геометрическая алгебра пифагорейцев

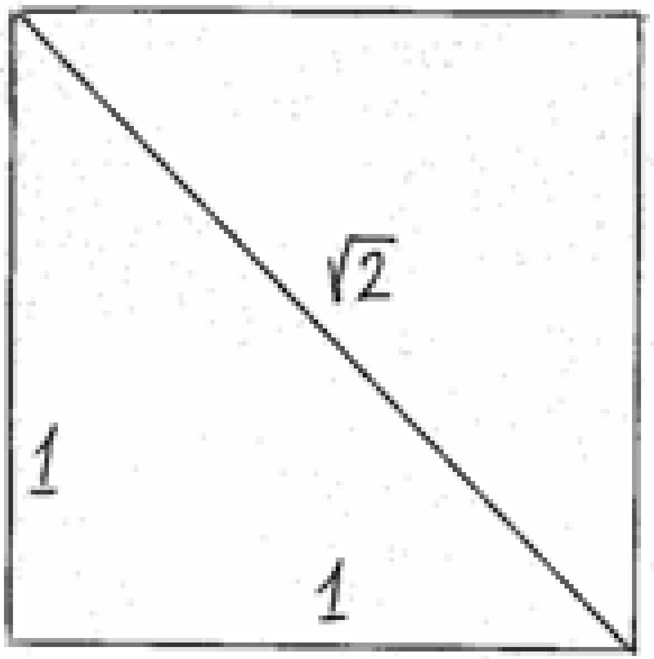
Теорема Пифагора. «Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах».





Деление. Приложить к данному отрезку c прямоугольник, равновеликий данному прямоугольнику *ab,* т.е. найти вторую сторону *x* прямоугольника так, чтобы *cx=ab* *(треугольники ABCD и CEGH равновелики)*

Несоизмеримость



В конце V века до н.э. **Феодор из Кирены** показал, что стороны квадратов, площади которых равны 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 17, несоизмеримы со стороной единичного квадрата

Ученик Феодора **Теэтет** в IV в.до н.э. дал первое общее доказательство того, что существует бесконечное множество таких квадратов, фактически доказав иррациональность $\sqrt{n}$; позже он ввел иррациональности вида $\sqrt[3]{n}$

Биномиали $\sqrt{n}+\sqrt{m}$ $n+\sqrt{m}$ (в арифметике)

Вычеты $\sqrt{n}-\sqrt{m}$ $n-\sqrt{m}$ (в музыке)

Медиали $\sqrt{\sqrt{n}\sqrt{m}}$ (в геометрии)

Теория отношений и пропорциональностей

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} \qquad arithmetic \quad a+c=2b$$

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} \qquad geometric \quad ac=b^2$$

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c} \qquad subcontrary \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$$

Теория отношений и пропорциональностей

«Говорят, что величины находятся в том же самом отношении (первая ко второй и третья к четвертой), если одинаковые кратные первой и третьей величин при сравнении с одинаковыми кратными второй и четвертой, независимо от того, какие именно кратные берутся, будут всегда или обе больше, или равны, или меньше каждой из двух соответственно и в той же самой последовательности.»

Таким образом, пропорция

$$a : b = c : d$$

означает, что

$$\text{из } na > mb \text{ следует } nc > md,$$
$$\text{из } na = mb \text{ следует } nc = md$$
$$\text{и из } na < mb \text{ следует } nc < md,$$

как бы ни были выбраны целые числа m и n.

Евдокс (ок. 400 – ок. 355 до н.э.)

- ❑Уроженец Книда
- ❑Основатель математико-астрономической школы в Кизике
- ❑Создатель первой греческой обсерватории
- ❑Автор первой геометрической модели Солнечной системы
- ❑Построил общую теорию отношений
- ❑Разработал метод исчерпывания

Евдоксова теория отношений

✓Равные одному и тому же равны между собой.

✓И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.

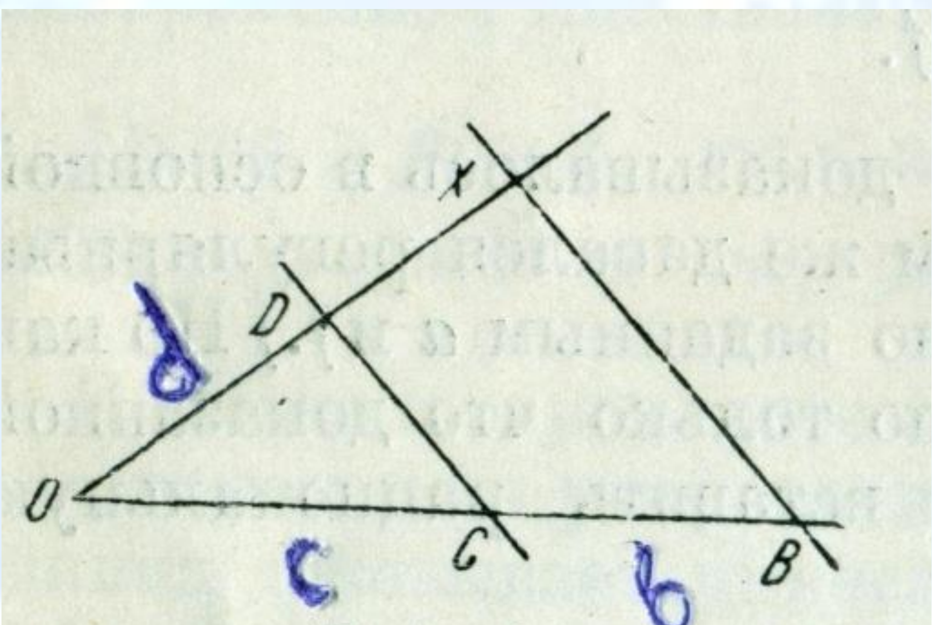
✓И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.

✓И совмещающиеся друг с другом равны между собой.

✓И целое больше части.

✓Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга (a и b имеют отношение между собой, если существует целое n такое, что $na>b$, и целое m такое, что $mb>a$).

Если $a:b=b:c$, то $a:c$ – двойное отношение, $a:b=b:d=d:c$, то $a:c$ – тройное



Способ нахождения четвертой пропорциональной $c:d=b:x$

Треугольники с равными высотами относятся как их основания

Метод исчерпывания

Метод Евдокса заключался в следующем: для определения неизвестной величины фигуры A (рис. 3) в нее вписывали монотонно возрастающую последовательность фигур $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, величины которых были известны. При этом фигуры A_n нужно было выбирать так, чтобы разность

$$A - A_n$$

могла быть сделана меньше любой наперед заданной величины b при достаточно большом числе последовательных вписываний.

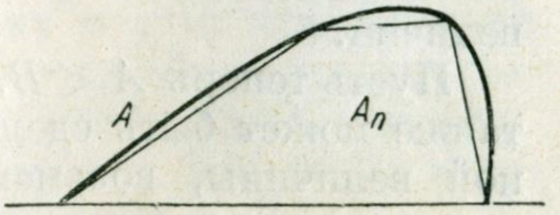


Рис. 3.

Она заключается в следующем: если a и b, $a > b$, – любые величины, подчиняющиеся аксиоме Евдокса — Архимеда, и если от величины a отнять больше ее половины, от полученного остатка больше его половины и так продолжать неограниченно, то после некоторого конечного числа вычитаний получится остаток α_n, меньший b:

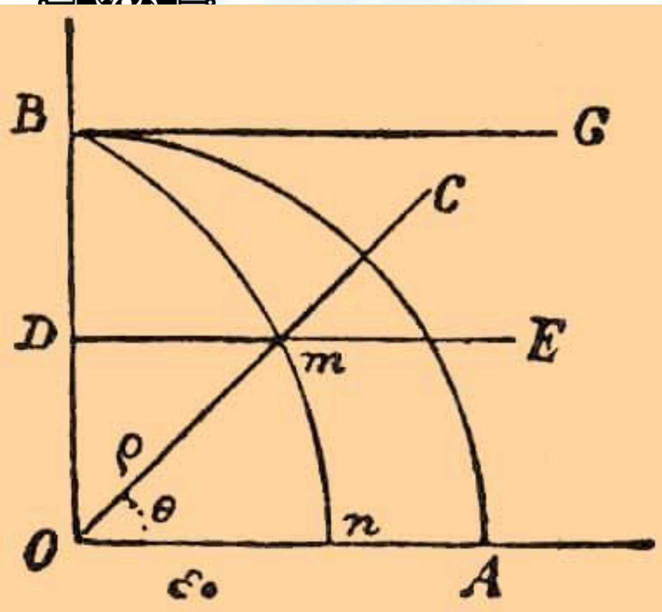
$$\alpha_n < \frac{a}{2^n} \leqslant b.$$

Иначе говоря, предел α_n равен нулю.

Этой леммой пользовались и сам Евдокс, и Евклид, и в ранних сочинениях Архимед для оценки разности $A - A_n$.

Площади двух кругов относятся друг к другу, как квадраты их диаметров

Первые замечательные пределы

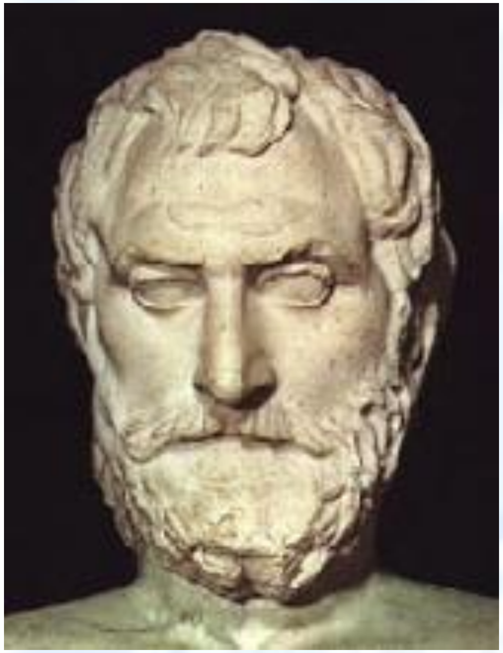


Квадратриса, которую исследовал ученик Евдокса **Динострат** (ввел кривую Гиппий Элидский)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

Другой ученик Евдокса, **Менехм** – астроном и математик – занимался вопросами оснований геометрии, написал работу о различии между теоремой и проблемой. Крупнейшее достижение, которое ему приписывается – открытие конических сечений (впоследствии стройная теория будет построена Аполлонием). Ученый рассмотрел сечения конусов вращения плоскостью, перпендикулярной к образующей, и получил параболы как сечения прямоугольного конуса, эллипсы как сечения остроугольного, гиперболы как сечения тупоугольного конуса.

Атомисты



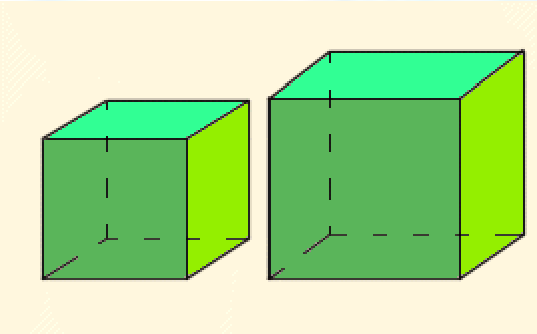
ЛЕВКИПП
ок. 500 – 440 до н. э.

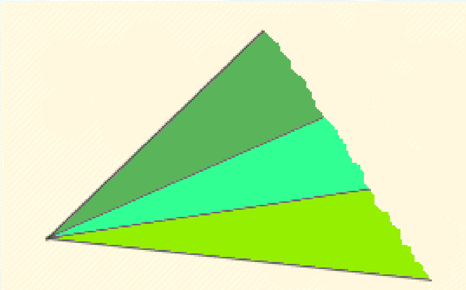
Демокрит перенес в математику свою натурфилософскую концепцию и начал составлять тела из конечного числа элементарных частей – атомов, объемы которых известны. Объем тел при этом находился суммированием объемов элементарных частей. Приобрел известность как геометр. Вероятно, бывал в Египте, Персии, Вавилоне. Среди известных заглавий его работ – труды о касании круга или шара, о числах, об изображении поверхности шара на плоской поверхности, об иррациональных отрезках.

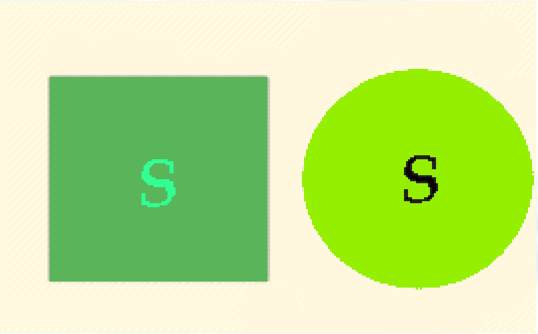
ДЕМОКРИТ
ок. 460 – ок. 370 до н. э.

Софисты (Афинская школа)

Три основных задачи древности







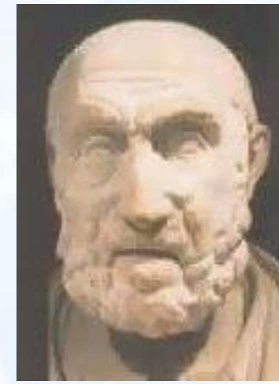
Удвоение куба. «... Во время эпидемии чумы послали афиняне в Дельфы вопросить оракула, что им сделать, чтобы чума прекратилась. Бог ответил им: удвоить алтарь и принести на нём жертвы.»

Деление произвольного угла на 3 равные части. О возникновении этой задачи (построение с помощью циркуля и линейки!) никаких интересных легенд нет. По-видимому она появилась внутри самой математики в связи с решением задачи о построении правильных многоугольников.

Построение квадрата равновеликого данному кругу. Задача о квадратуре круга была популярна в Древней Греции. Плутарх сообщает, что Анаксагор в тюрьме занимался этой задачей.

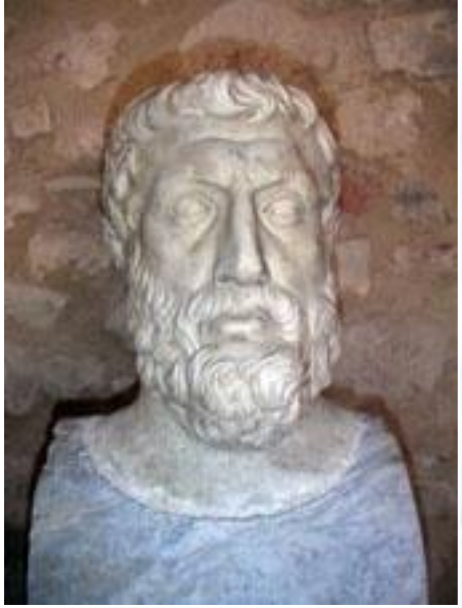
Добавляются:

- деление окружности на *n* равных частей
- квадрирование луночек (построить прямолинейную фигуру, равновеликую данной круговой луночке).



Гиппократ Хиосский (2я половина V в. до н.э.). Начал жизнь купцом, а, перебравшись в Афины, увлекся геометрией.

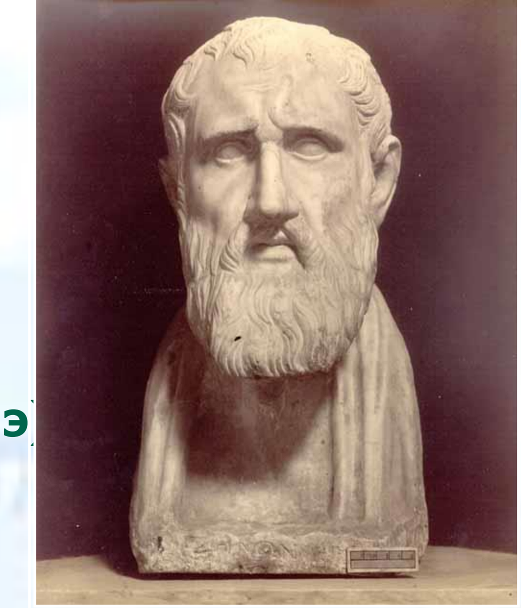
Гиппократ нашёл луночки, допускающие квадратуру, но это не помогло ему решить задачу о квадратуре. Вопрос о том, какие луночки квадрируемы, оказался сложным и был полностью решён только в XX в. советским математиком Н. Г. Чеботарёвым (5 видов!).



Элеаты

Парменид
(ок 540.520 – ок.450 до н.э.)

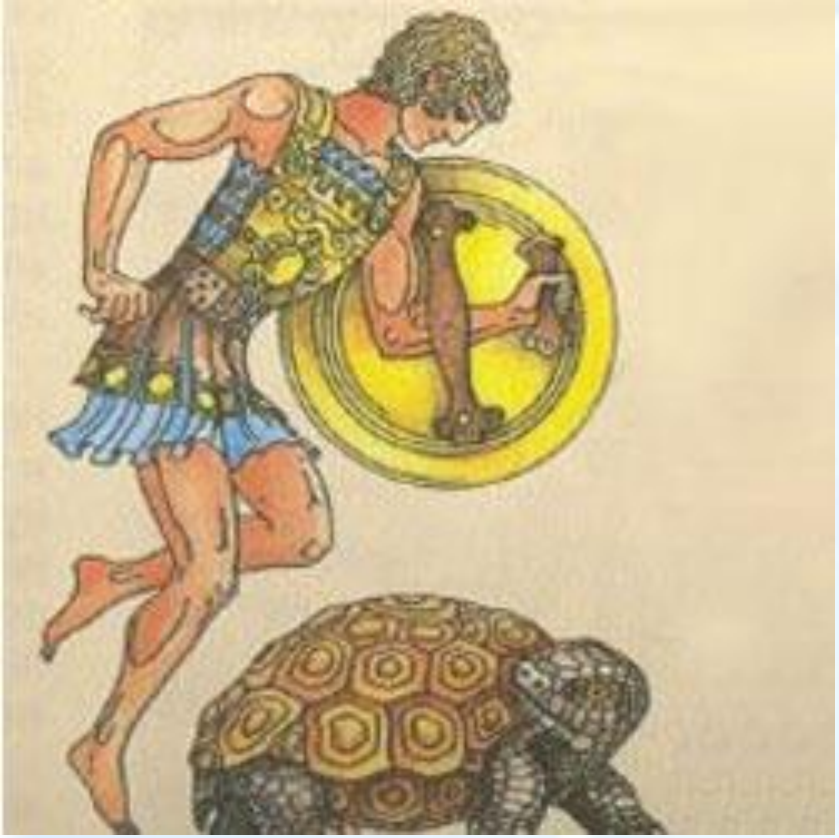
Зенон
(ок. 490 – ок. 430 до н.э)



- **Апория места (немыслимость пустоты)**
- **Апории множества (немыслимость множества)**
  - **Парадокс делимости**
  - **Парадокс сложения**
  - **Парадокс счисления**
- **Апории движения (немыслимость движения)**
  - **«Ахилл и черепаха»**
  - **«Дихотомия»** ***(деление на два)***
  - **«Стрела»**
  - **«Стадий»**

Апории движения

«Дихотомия». Прежде чем движущийся объект сможет преодолеть определенное расстояние, он должен пройти половину этого пути, затем половину оставшегося пути и т.д. до бесконечности. Поскольку при повторных делениях данного расстояния пополам всякий отрезок остается конечным, а число таких отрезков бесконечно, данный путь невозможно пройти за конечное время

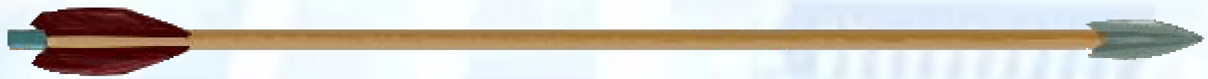


«Ахилл», который никогда не догонит черепаху, поскольку сперва он должен добежать до того места, откуда начинает двигаться черепаха, а за это время она доберется до следующей точки и т.д., словом, черепаха всегда будет впереди..

В «Дихотомии» доказывалось, что бегун не может пуститься в путь, потому что он не может покинуть того места, в котором находится, в «Ахилле» доказывается, что даже если бегуну удастся тронуться с места, он никуда не прибежит.

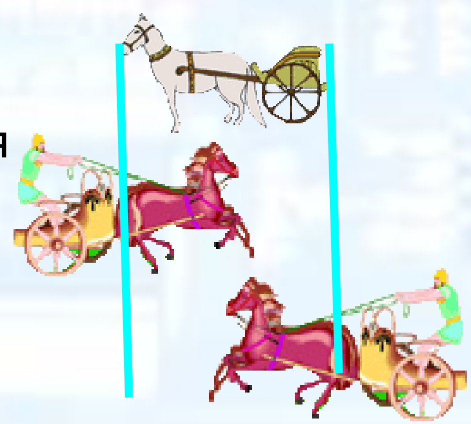
Апории движения

«Стрела». Зенон утверждает: любая вещь либо движется, либо стоит на месте. Однако ничто не может пребывать в движении, занимая пространство, которое равно ему по протяженности. В определенный момент движущееся тело (в данном случае стрела) постоянно находится на одном месте. Следовательно, летящая стрела не движется.



«Стадий». Если две колесницы движутся навстречу друг друга со скоростью, равной минимальной единице пространства за минимальную единицу времени мимо третьей – неподвижной – колесницы, то они пройдут расстояние, равное минимальной единице пространства, за минимальную единицу времени относительно неподвижной колесницы и за половину минимальной единицы времени относительно друг друга..

Бесконечно большая величина которая все время возрастает, но никогда не достигает какого-либо определенного значения, называется **потенциальной**



Актуальная бесконечность означает, что рассматривается (как реально существующая) величина, не имеющая конечной меры (время)

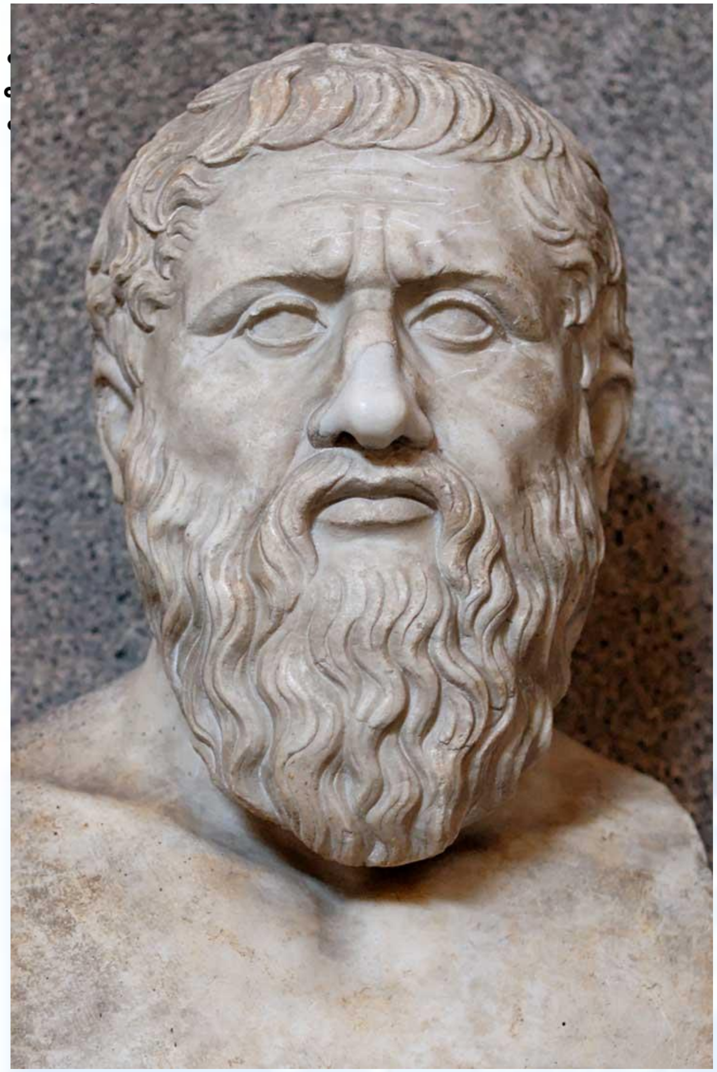
Академия Платона и Ликей Аристотеля

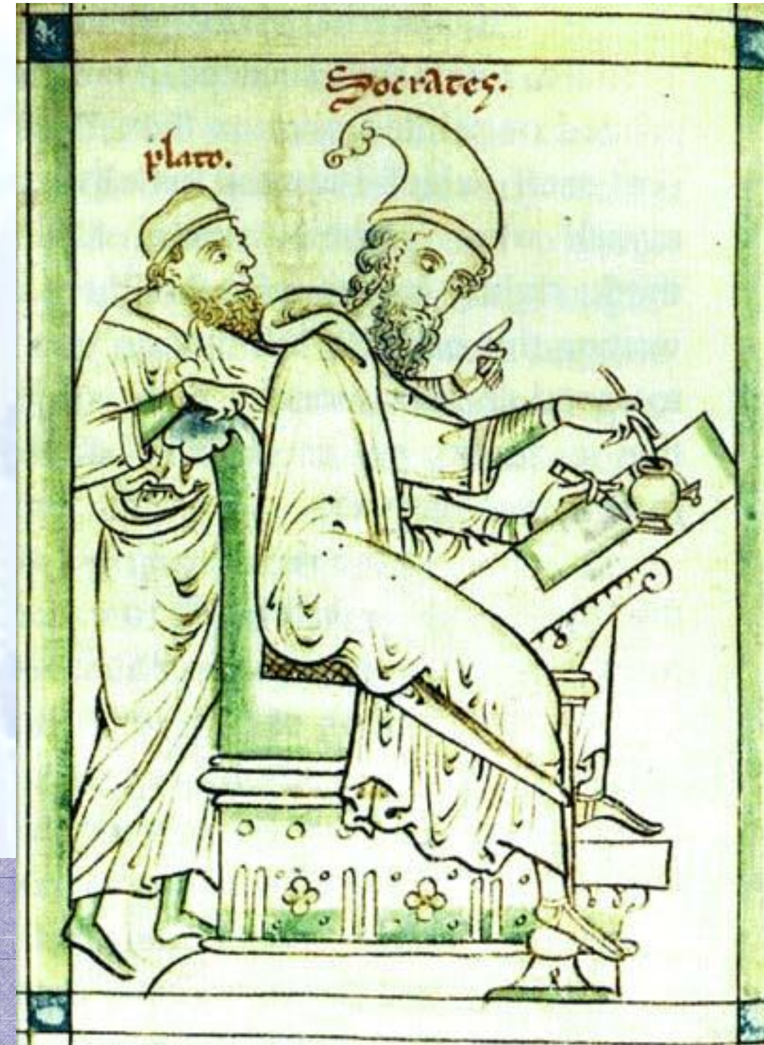
387 г. до н.э. (Академия Платона)
«Не знающий геометрии да не войдет сюда!»

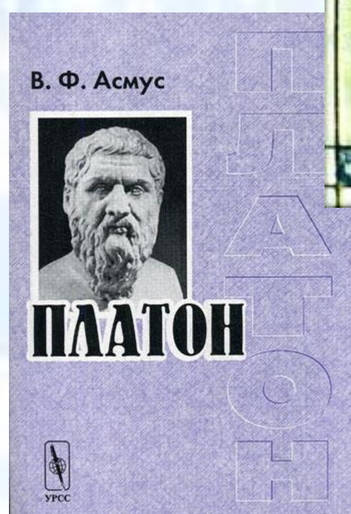
- **Древняя (1-я) академия** возглавлялась самим Платоном, а затем последовательно его учениками и находилась под влиянием пифагореизма.
- **Средняя (2-я) академия** начинается со схоларха Аркесилая (265–241 до н.э.), скептицизм
- Карнеад Киренский (начало II в. до н.э.) является основателем **Новой (3-й) академии,** полемика со стоиками. Затем переход на путь эклектизма
- В **529 г.н.э**. закрыта императором Юстинианом

335/334 г. до н.э. (Ликей Аристотеля)

1. Зенон Китийский или Зенон Элейский 2. Эпикур
3. Фредерико II, герцог Мантуи 4. Боэций или Анаксимандр или Эмпедокл
5. Аверроэс 6. Пифагор 7. Алкивиад или Александр Македонский
8. Антисфен или Ксенофонт 9. Гипатия (возлюбленная Рафаэля, Маргерита)
10. Антисфен или Ксенофонт 11. Парменид 12. Сократ
13. Гераклит Эфесский (Микеланджело) 14. Платон (Леонардо да Винчи)
15. Аристотель (держащий Никомахову этику) 16. Диоген
17. Плотин 18. Евклид или Архимед с учениками
19. Страбон или Заратустра 20. Клавдий Птолемей 21. Протоген

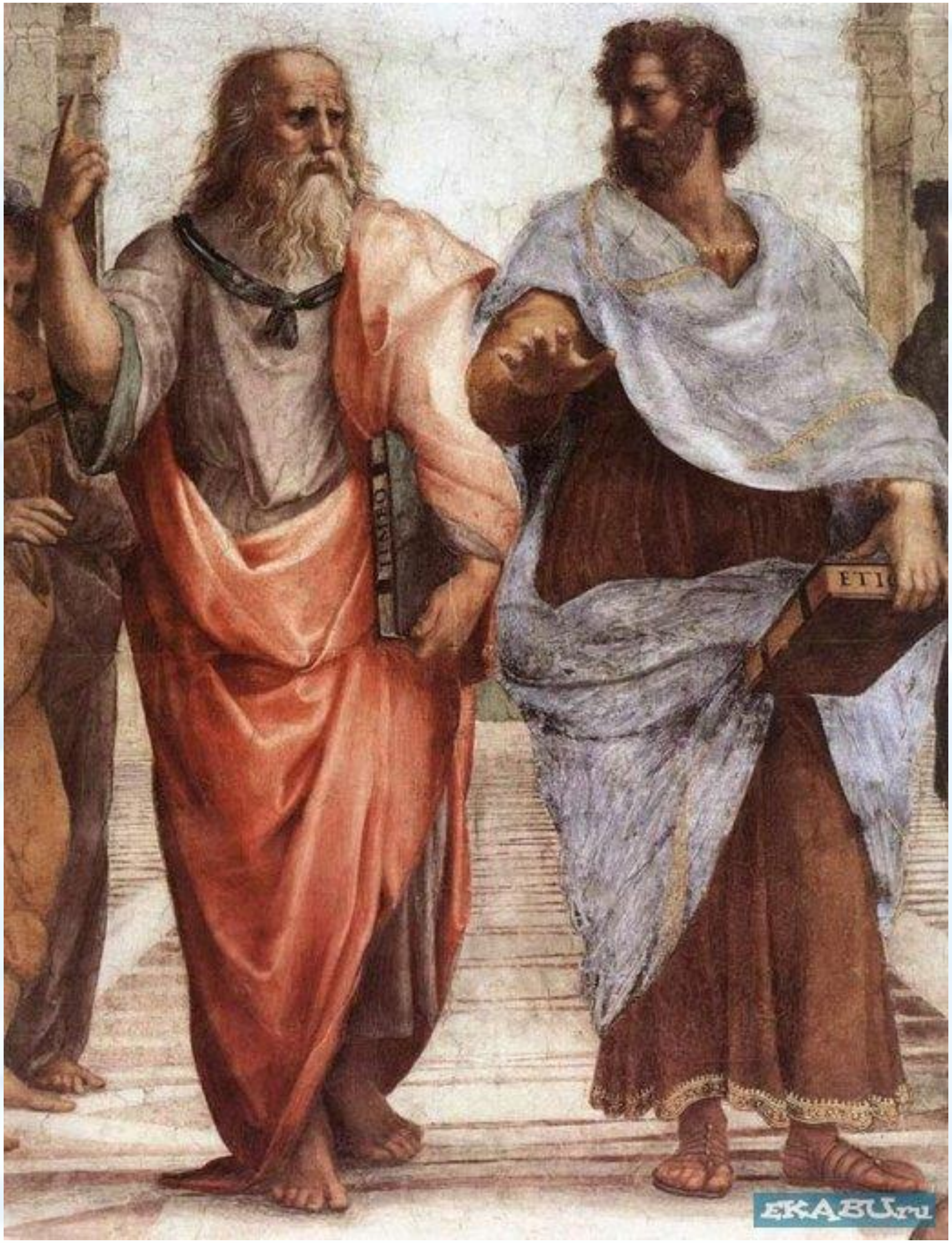




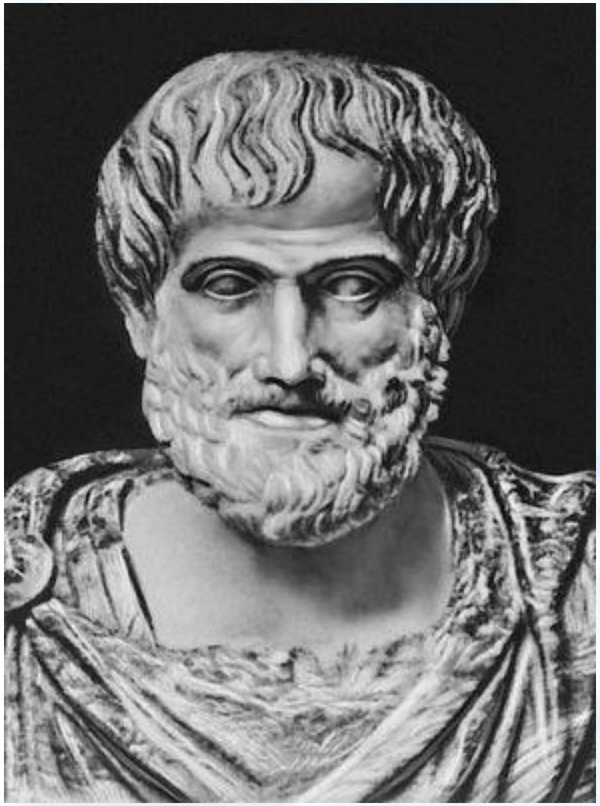


ПЛАТОН

428/427-347 до н.э.


ЕКАБU.ru

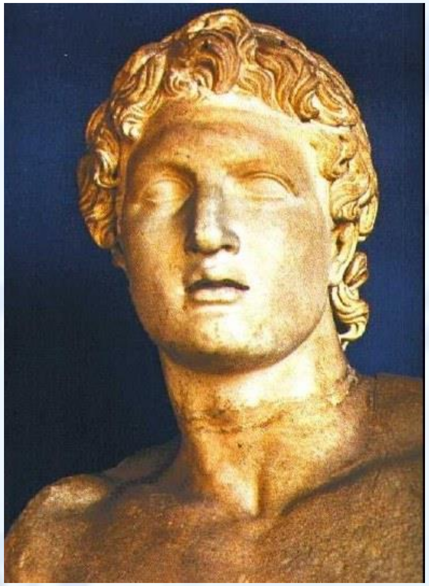
АРИСТОТЕЛЬ
384/283-322 до н.э.



Рембрандт Харменс ван Рейн. Аристотель перед бюстом Гомера. 1653. Музей Метрополитен, Нью Йорк

АРИСТОТЕЛЬ 384/283-322 до н.э.

«Физика»
«О небе»
«О возникновении и уничтожении»
«О метеорах»
«Метафизика»
«Механические проблемы» (школа Аристотеля)



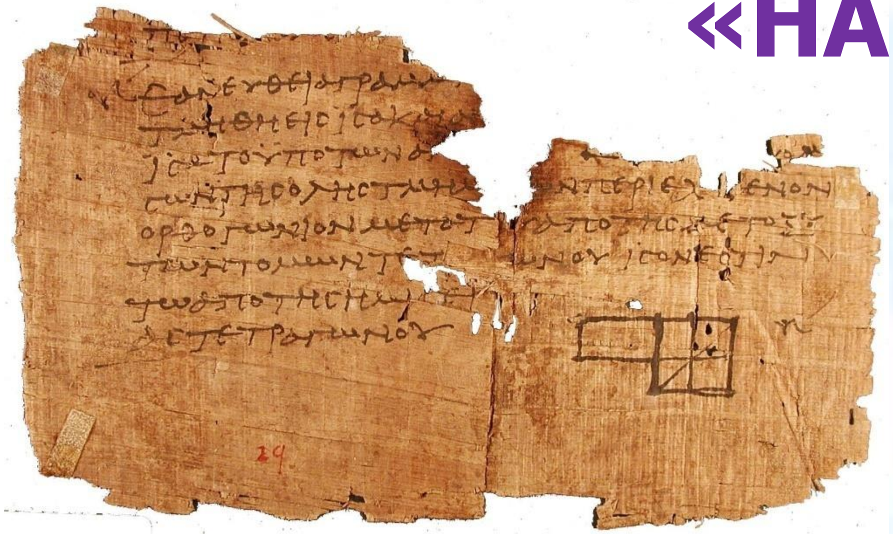
- *В основе утверждении о том, что Земля неподвижна и находится в центре Вселенной*
- *Тяготение не выделялось как специальное понятие*
- *Естественное и насильственное движение*

ЕВКЛИД (ок. 365 – ок.300 до н.э.)

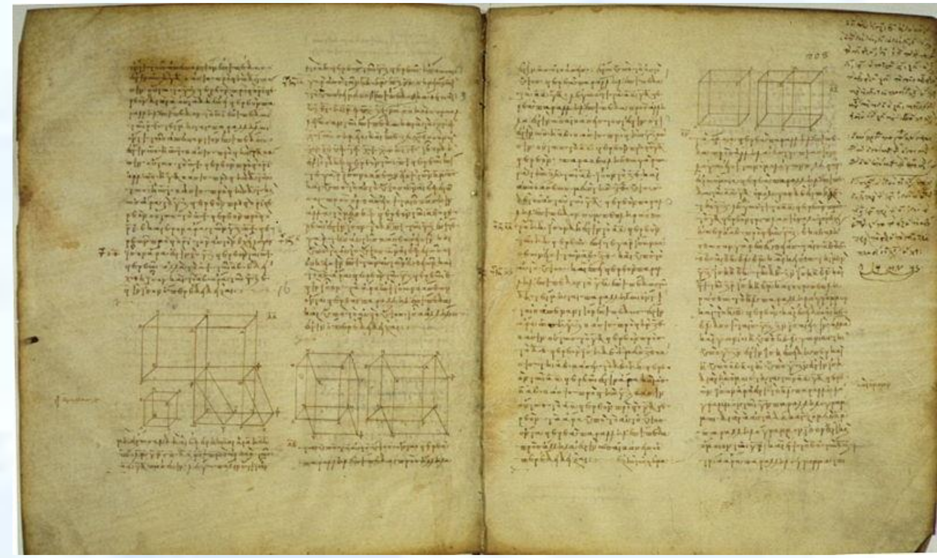
Йос ван Вассенхове (Юстус из Гента). Евклид, ок. 1474. Урбино

Статуя Евклида в Оксфордском университетском музее естественной истории

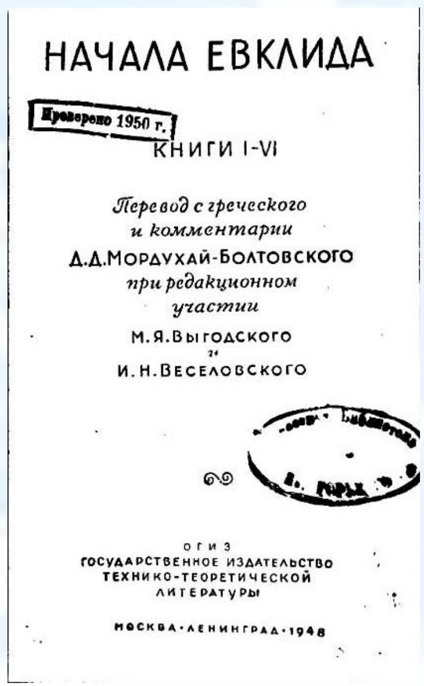
«НАЧАЛА»



Оксиринхский папирус ок. 100 г. н. э. с диаграммой



Ватиканский манускрипт



НАЧАЛА ЕВКЛИДА

КНИГИ I-VI

Перевод с греческого и комментарии

Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО

при редакционном участии

М. Я. ВЫГОДСКОГО и И. Н. ВЕСЕЛОВСКОГО

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА · ЛЕНИНГРАД · 1948

«НАЧАЛА»

I книга — планиметрия прямолинейных фигур
II книга — теоремы «геометрической алгебры».
III книга — предложения об окружностях, их касательных и хордах.
IV книга — предложения о вписанных и описанных многоугольниках.
V книга — общая теория отношений, разработанная *Евдоксом Книдским*.
VI книга — учение о подобии геометрических фигур.
Интересно применение геом. алгебры к решению уравнений $\frac{b}{c}x(a \pm x) = S$

VII, VIII (*Архит***) и IX книги** посвящены теоретической арифметике.
X книга — классификация несоизмеримых величин. Это самая объёмная из книг *Начал*.
XI книга — начала стереометрии: теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей; теоремы о телесных углах, теоремы о равенстве и подобии параллелепипедов.
XII книга — теоремы о пирамидах и конусах, доказываемые с помощью метода исчерпывания.
XIII книга — построение правильных многогранников; доказательство того, что существует ровно пять правильных многогранников. *(Теэтет)*

«НАЧАЛА», книга I

- Точка есть то, что не имеет частей. (Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν — букв. «Точка есть то, часть чего ничто»)
- Линия — длина без ширины.
- Края же линии — точки.
- Прямая линия есть та, которая равно лежит на всех своих точках. (Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται)
- Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
- Края же поверхности — линии.
- Плоская поверхность есть та, которая равно лежит на всех своих линиях

«НАЧАЛА», Книга I

ПОСТУЛАТЫ

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра всяким раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

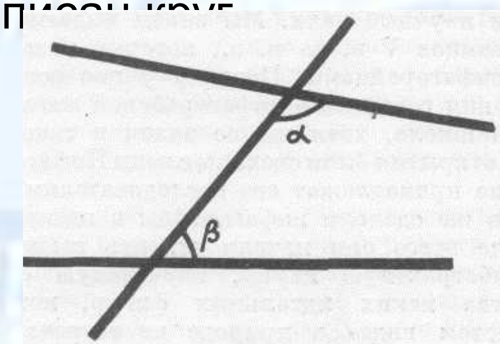
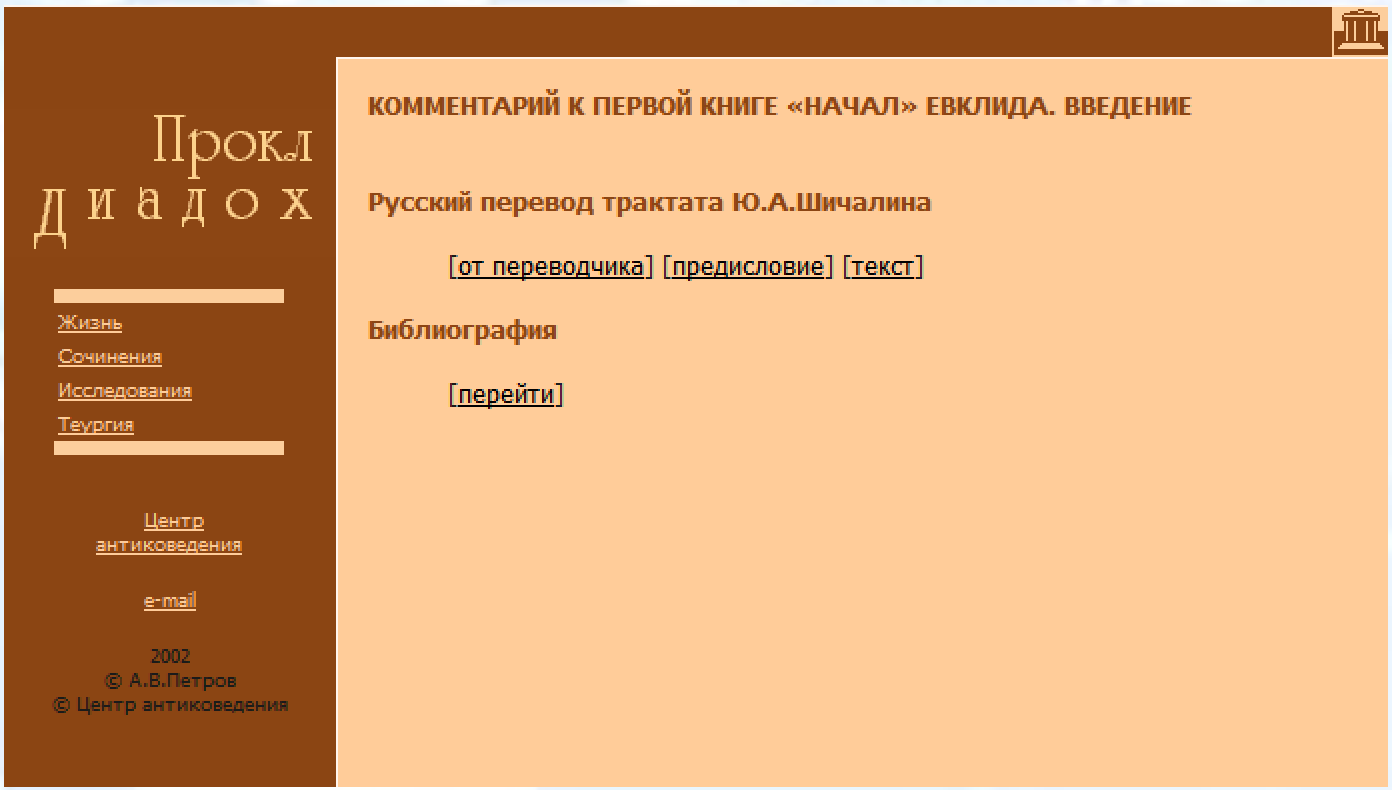


Рис. 1.

АКСИОМЫ

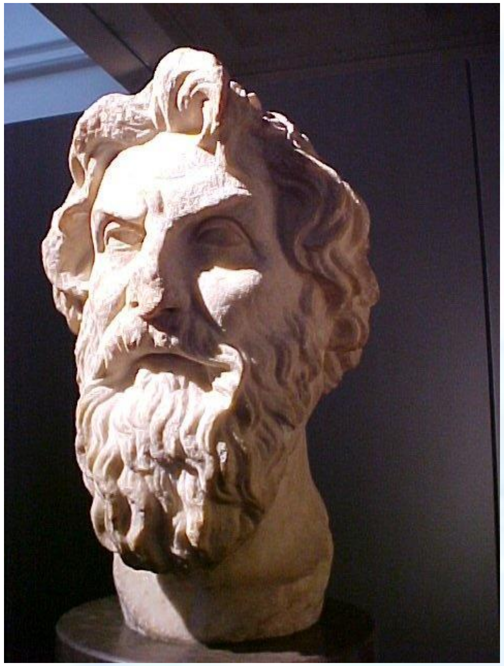
•Равные одному и тому же равны и между собой
•И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.
•И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.
•. И совмещающиеся друг с другом равны между собой.
• И целое больше части.

❖Алимов Н. Г. Величина и отношение у Евклида. *Историко-математические исследования*, вып. 8, 1955, с. 573—619.
❖Башмакова И. Г. Арифметические книги «Начал» Евклида. *Историко-математические исследования*, вып. 1, 1948, с. 296—328. .
❖Выгодский М. Я. «Начала» Евклида. *Историко-математические исследования*, вып. 1, 1948, с. 217—295.
❖Каган В. Ф. Евклид, его продолжатели и комментаторы. В кн.: Каган В. Ф. *Основания геометрии*. Ч. 1. М., 1949, с. 28-110.

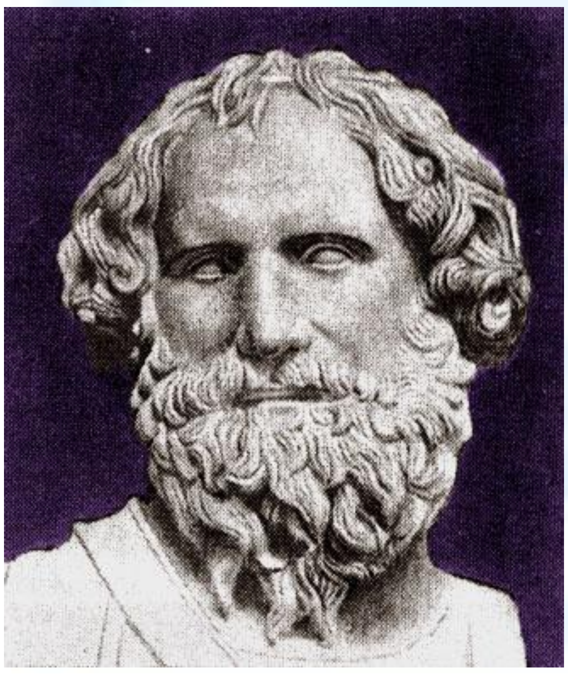


http://centant.spbu.ru/plat/proklos/works/28euklid.htm

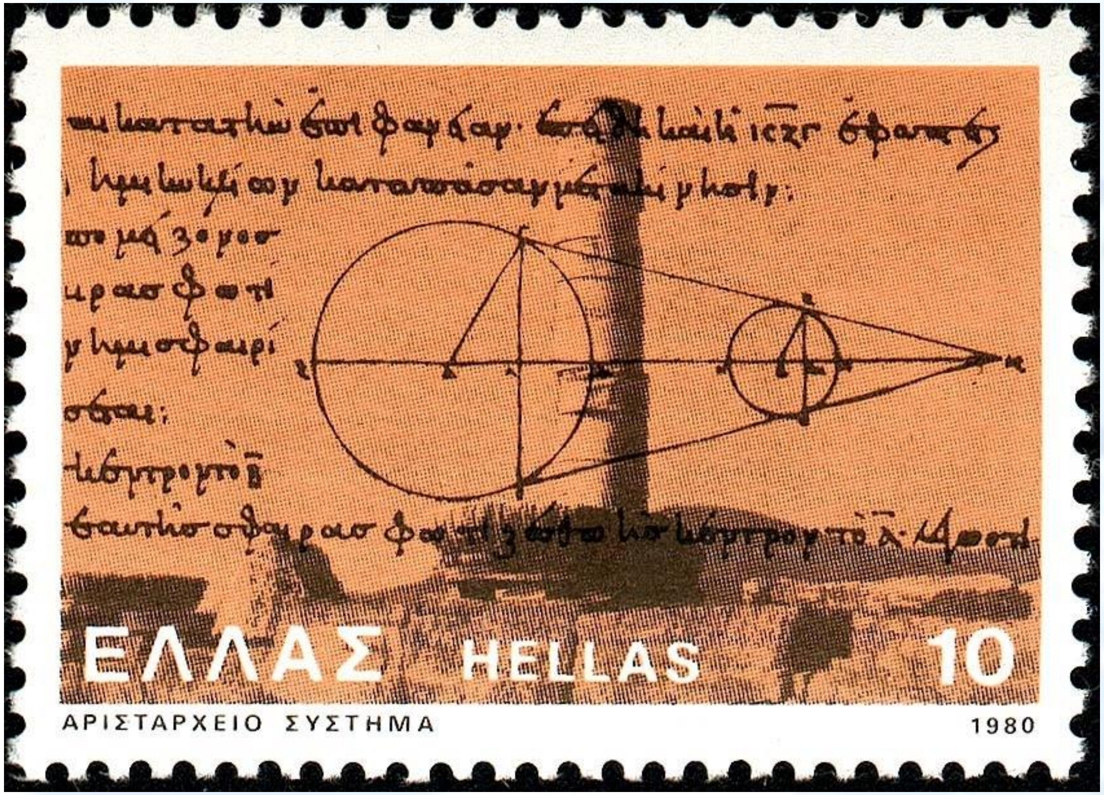
Математика эпохи эллинизма



«Период высшего расцвета древней математики, век проницательного тонкого математика-астронома Аристарха, несравненных гениев Архимеда и Аполлония, многостороннего эрудита Эратосфена и остроумного геометра Никомеда» (Ван дер Варден)



Аристарх Самосский (конец IV в. до н.э. — первая половина III в.

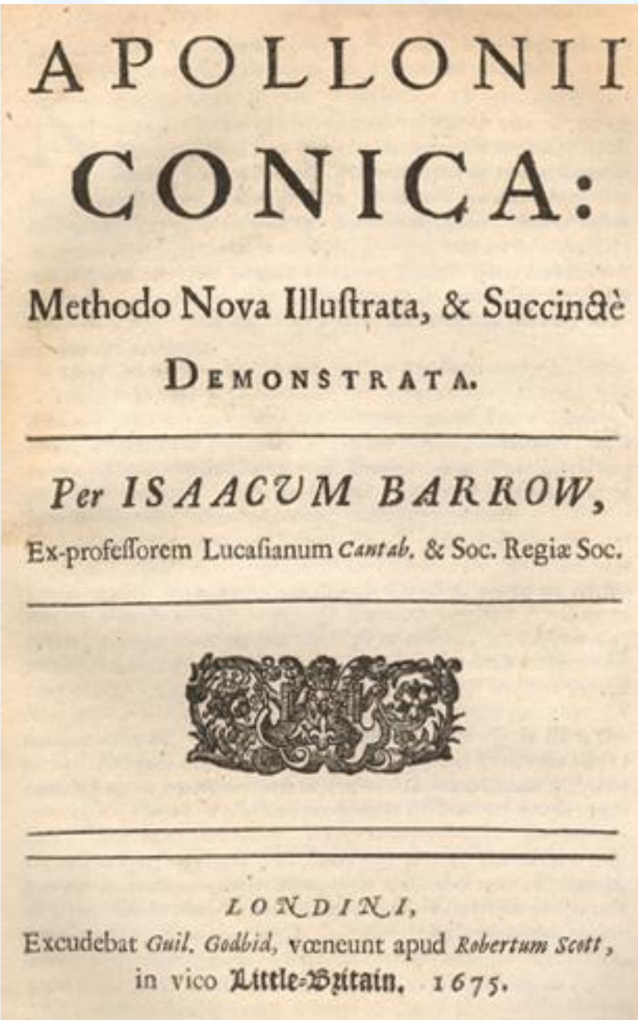


Земля движется по кругу вокруг Солнца

Соединял строгие математические методы и результаты наблюдений, например, за затмениями Луны и Солнца.

Житомирский С.В. *Гелиоцентрическая гипотеза Аристарха Самосского и античная космология* //Историко–астрономические исследования, 1986, вып. XVIII, стр. 151–160
Веселовский Н.И. *Аристарх Самосский — Коперник античного мира* // Историко–астрономические исследования, 1961, стр. 11-70

Аполлоний Пергский (2я пол. III в. – 1я пол. II в. до н.э.)



APOLLONII

CONICA:

Methodo Nova Illuſtrata, & Succinctè

DEMONSTRATA.

Per ISAACUM BARROW,

Ex-profeſſorem Lucaſianum *Cantab.* & Soc. Regiæ Soc.

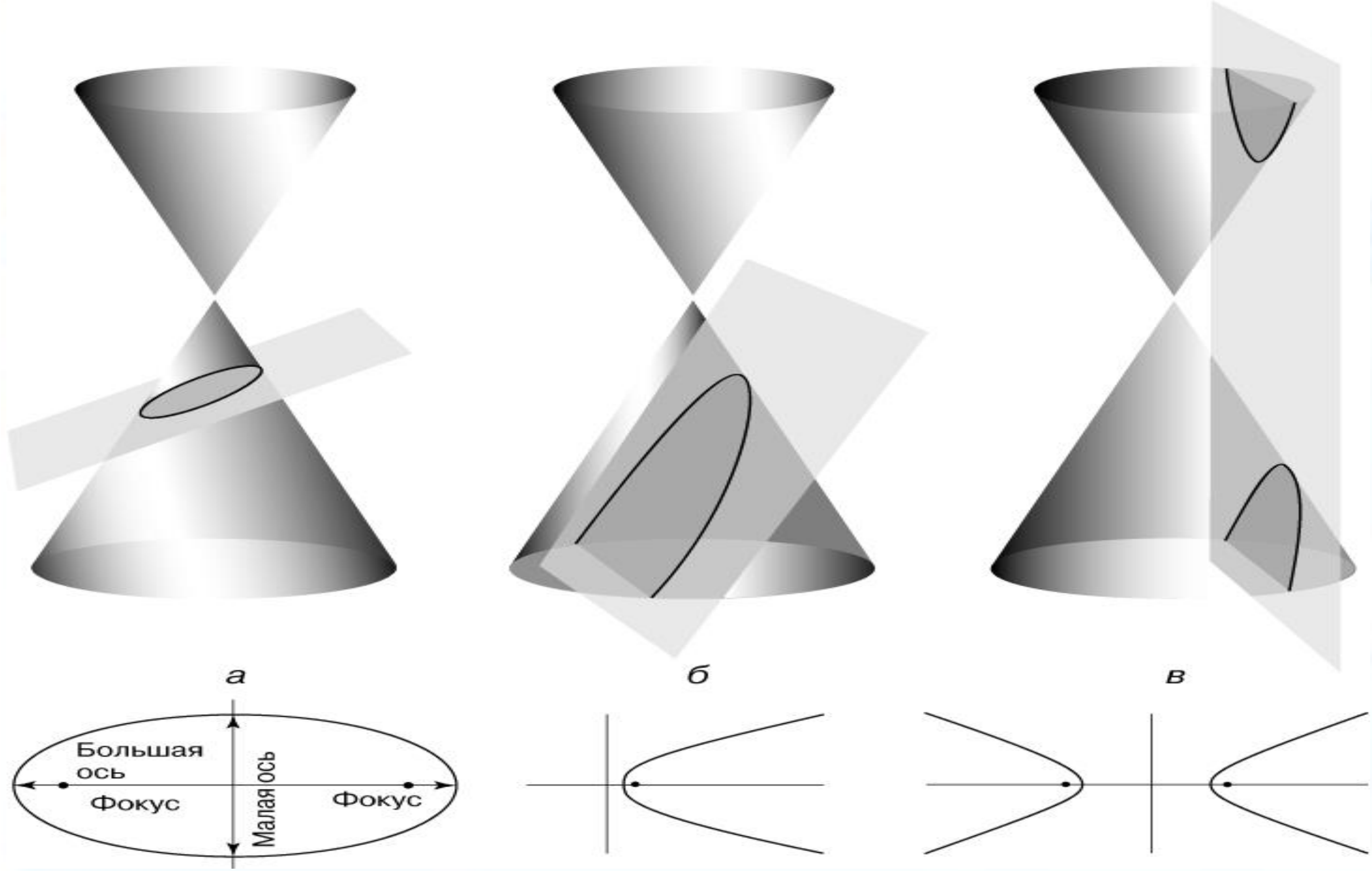
LONDINI,

Excudebat *Guil. Godbid*, vœneunt apud *Robertum Scott*,

in vico Little-Britain. 1675.

- ❖Первая: способ получения конических сечений и их основные свойства
- ❖Вторая: диаметры, главные оси, асимптоты и другие объекты
- ❖Третья: результаты, необходимые для изучения пространств. геом. мест
- ❖Четвертая: вопросы пересечений
- ❖Пятая: исследование наибольших и наименьших линий, идущих от какой-нибудь точки к коническому сечению,
- ❖Шестая: вопросы равенство и подобие конических
- ❖Седьмая: предложения, необходимые для определения геометрических мест
- ❖Восьмая: задачи

Аполлоний Пергский
(2я пол. III в. – 1я пол. II в. до н.э.)



Аполлоний Пергский (2я пол. III в. – 1я пол. II в. до н.э.)

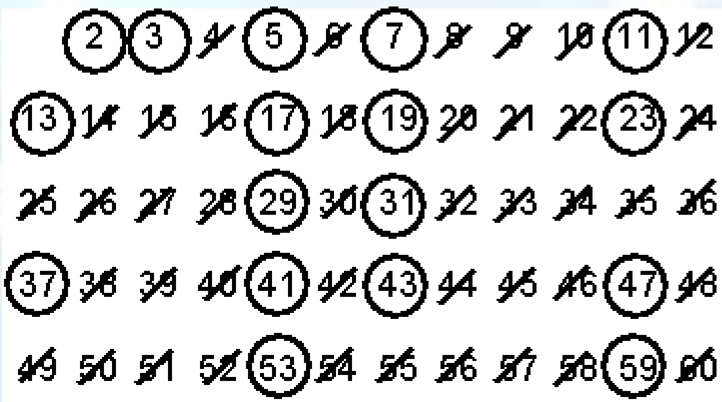
1. О *сечении в данном отношении (сохранилось)*
2. О *сечении с заданной площадью.*
3. *3. Об определенном сечении.*
4. О *касаниях (две книги)*
5. О *плоских геометрических местах,*
6. *Сравнение додекаэдра и икосаэдра*
7. О *винтовой (спиральной) линии*
8. О *неупорядоченных иррациональностях,*
9. *Okytokion («быстросчетчик»)*

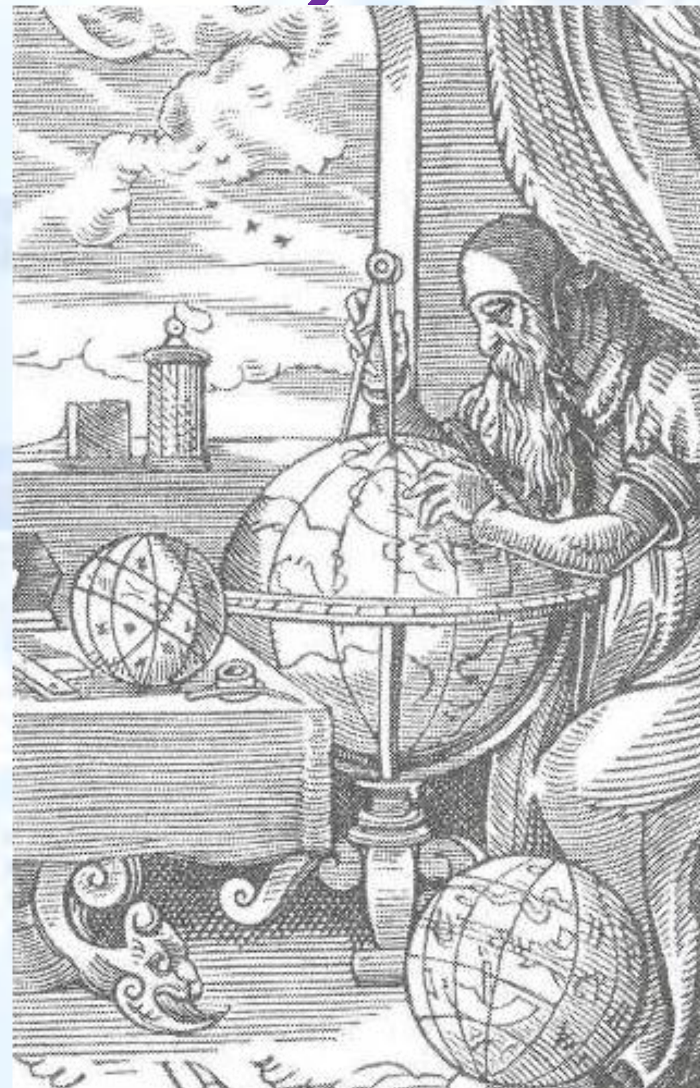
УТРАЧЕНЫ
Общее рассуждение.
О винтовой (спиральной) линии
О *неупорядоченных иррациональностях,*
«Быстросчетчик»

Эратосфен Киренский (276 – 194 гг. до н.э.)

«Пентатлос»:
- Математик
- Географ
- Историк
- Филолог
- Поэт

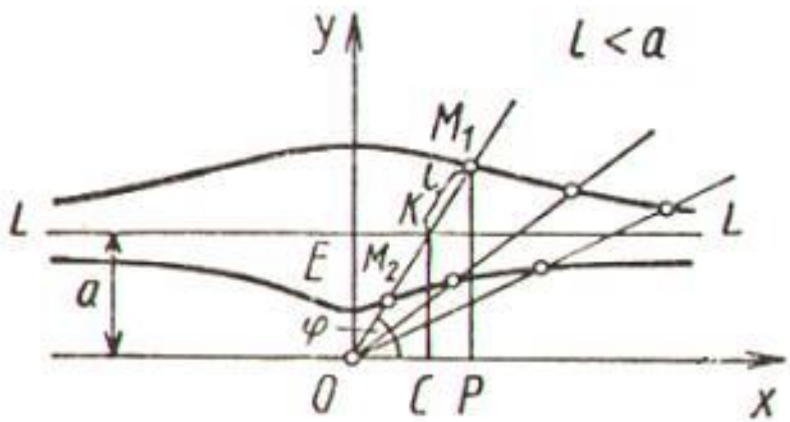
В математике:
- Хронография, измерение расстояний
- Удвоение куба
- Арифметическая теория средних
- Теория чисел

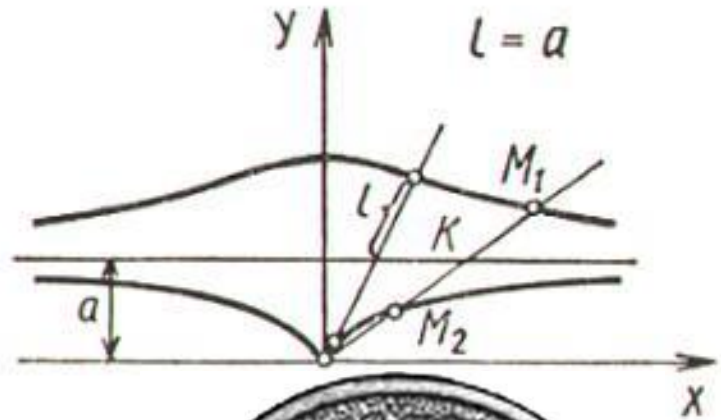


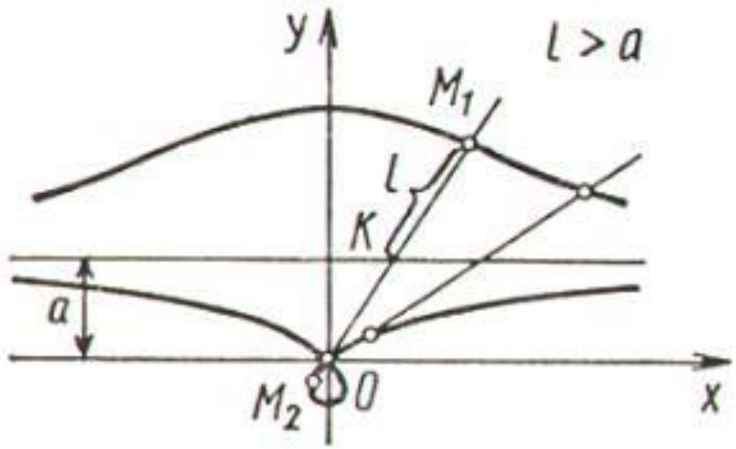


Дитмар А. Б. Родосская параллель: Жизнь и деятельность Эратосфена — М.: Мысль, 1965. — 72 с.

Никомед (II век до н.э.)







$$\left(x^2+y^2\right)\left(y-a\right)^2-l^2y^2=0.$$

КОНХОИДА Никомеда (множество точек М и М , получающееся при увеличении или уменьшении каждого радиус-вектора точек данной прямой *y* = *a* на одну и ту же величину *l*.

$$\rho=\frac{a}{\sin\varphi}\pm l.$$

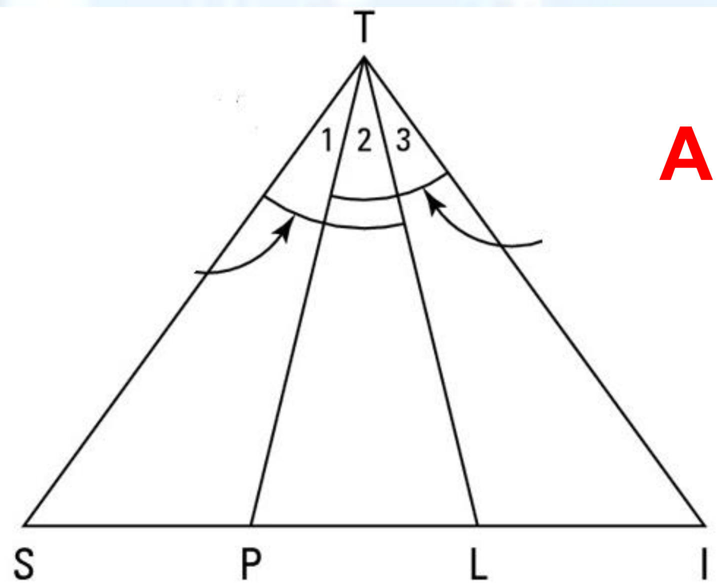
$$OM_1=OK+l,\ OM_2=OK-l\quad\forall K.$$

Трисекция

Гиппий Элийский (V в. до н.э.)

Ввел кривую, получившую название квадратриса (трисеткриса)

Папп Александрийский

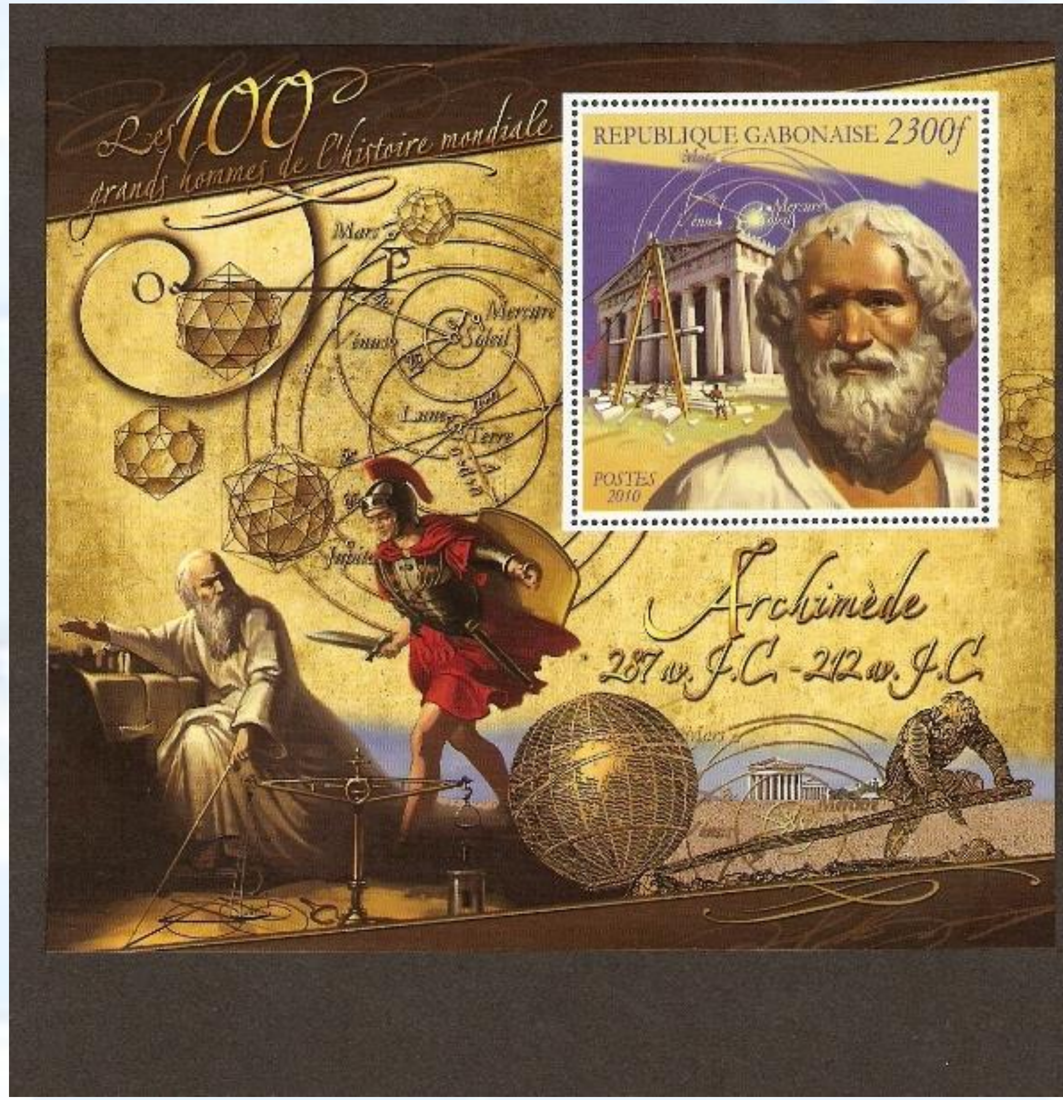


Архимед

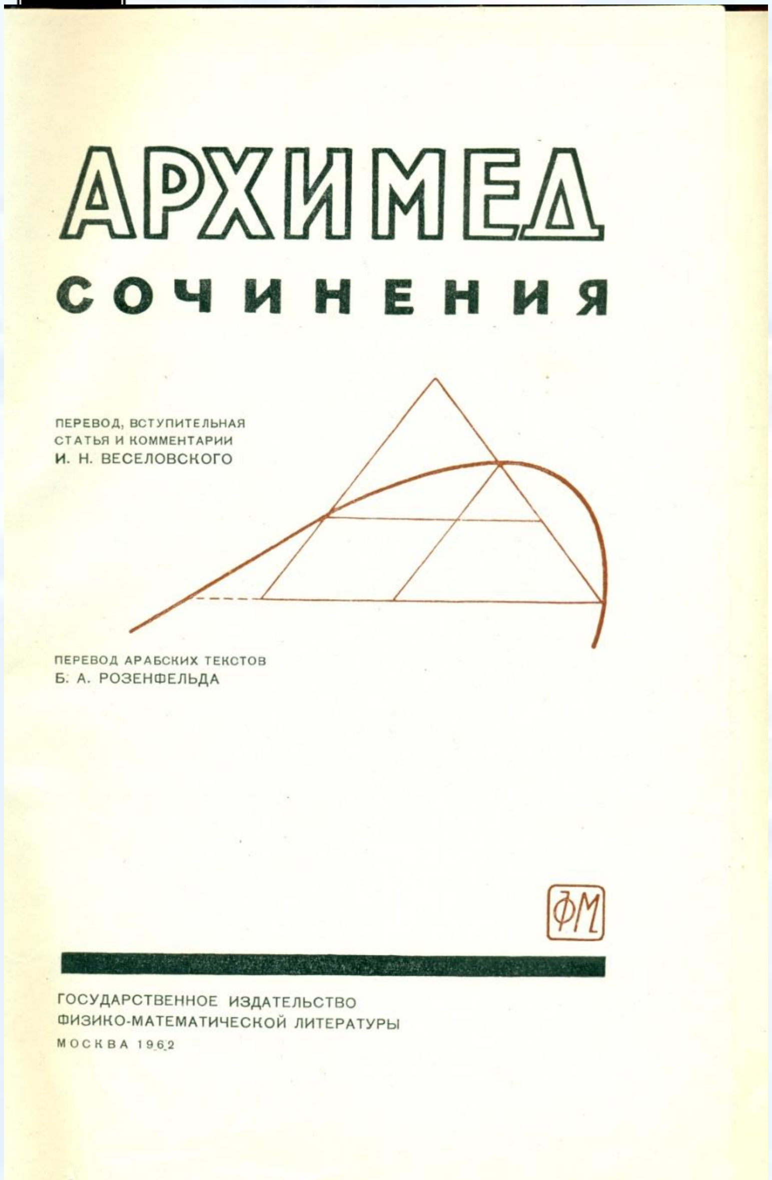
Пьер Ванцель 1814-1848

$$x^3 - 3x - 2\ \cos\alpha = 0.$$

Архимед (287-212 до н.э.)



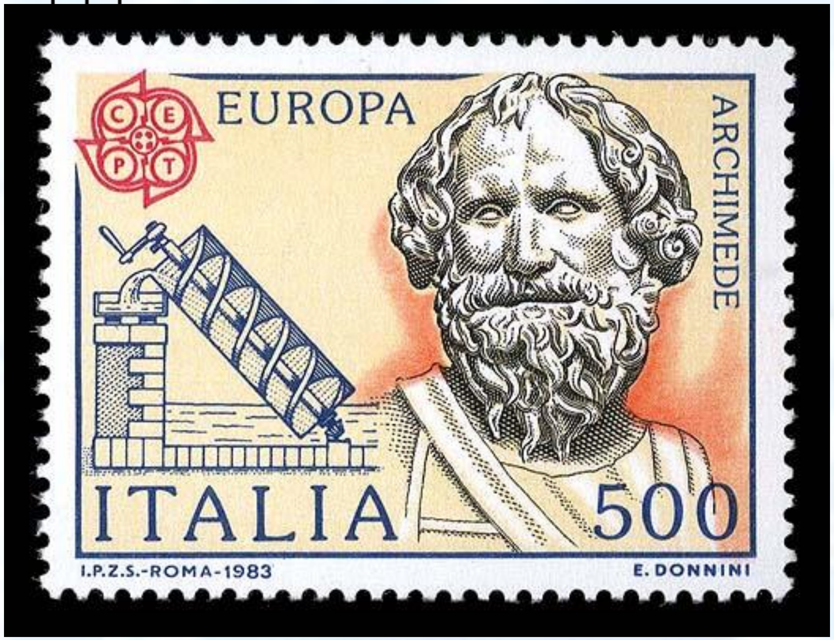
Архимед (287-212 до н.э.)

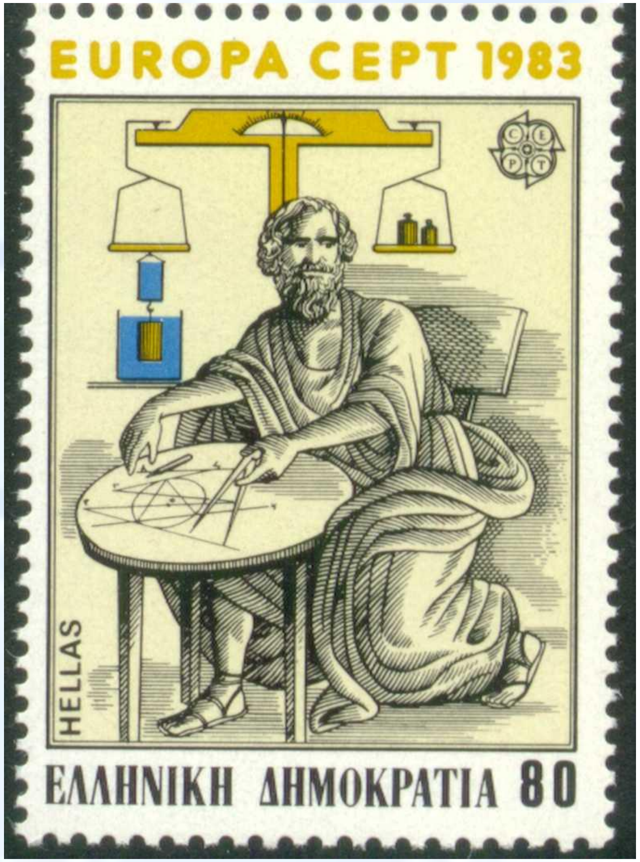


«Послание к Эратосфену о механических теоремах»

«Так как я (как я говорил уже) считаю тебя серьезным ученым и выдающимся по значению философом..., то я счел уместным в этой же книге изложить и объяснить тебе особый метод, благодаря которому ты получишь хорошее вспомогательное средство для исследования некоторых математических вопросов при помощи механики. Этот прием, по моему глубокому убеждению, не в меньшей мере полезен и для доказательства теорем»

Архимед (287-212 до н.э.)



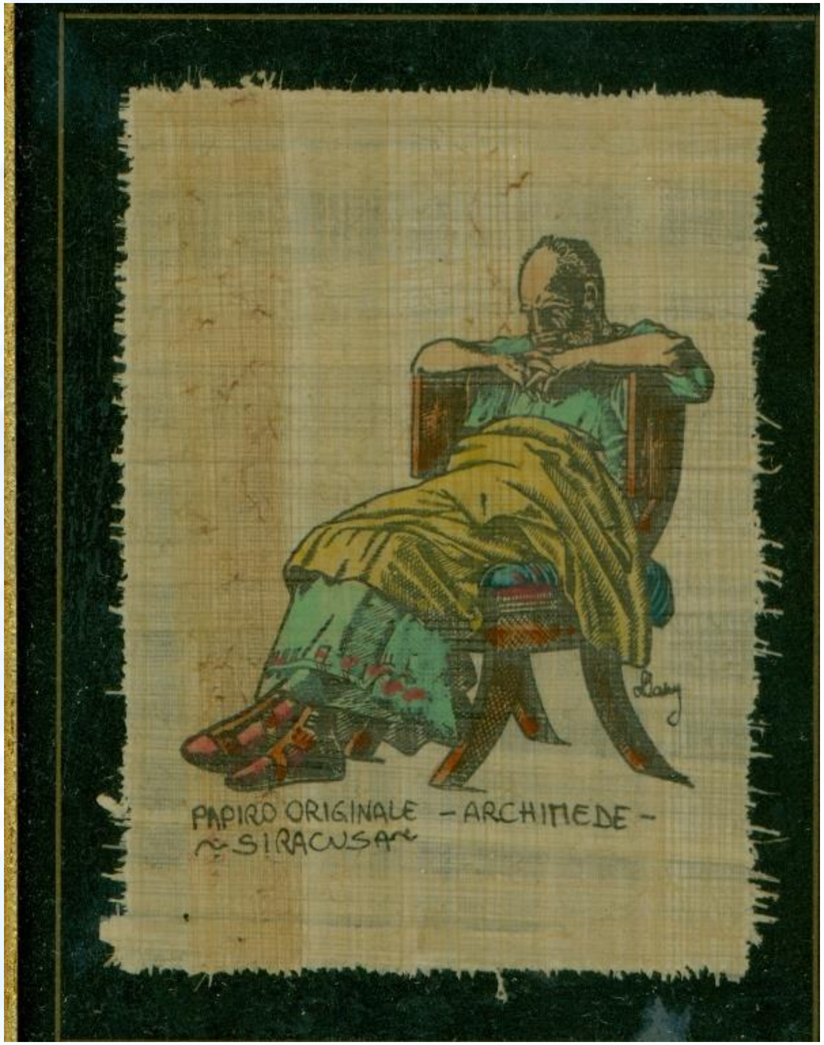


«О равновесии плоских фигур» - выведен закон рычага (*две величины уравновешивают друг друга, если их расстояния обратно пропорциональны весам*)

«О плавающих телах» - аналогичный метод применен к решению задач гидростатики.

Архимед (287-212 до н.э.)

Доказательства теорем о площадях и объемах криволинейных фигур или тел
О шаре и цилиндре
Об измерении круга
О коноидах и сфероидах
О спиралях
О квадратуре параболы.



Работы по геометрическому анализу статических и гидростатических задач
О равновесии плоских фигур
О плавающих телах

Различные математические работы
О методе механического доказательства теорем
Исчисление песчинок (Псаммит)

Задача о быках $x^2 - 4729494\, y^2 = 1$

Стомахион (сохранился лишь в отрывках)

Архимед (287-212 до н.э.)

Щетников А.И. Задача Архимеда о быках, алгоритм Евклида и уравнение Пелля // Математика в высшем образовании, 2004, № 2

Имеется 4 разноцветных стада быков и коров: белое, черное, рыжее и пестрое. Известно следующее:

1) белые быки составляли половину плюс треть черных быков и плюс общее число рыжего стада. 2) черные быки — одну четверть плюс одну пятую пестрых быков плюс общее число рыжего стада. 3) пестрые быки — одну шестую плюс одну седьмую белых быков плюс общее число рыжего стада. 4) белые коровы составляли одну треть плюс одну четвертую черного стада. 5) черные коровы — одну четвертую плюс одну пятую пестрого стада. 6) пестрые коровы — одну пятую плюс одну шестую рыжего стада. 7) рыжие коровы — одну шестую плюс одну седьмую белого стада.

Найти : 1) количество быков и коров в каждом стаде; 2) общее количество быков и коров

$$x^2 - 4729494\, y^2 = 1$$

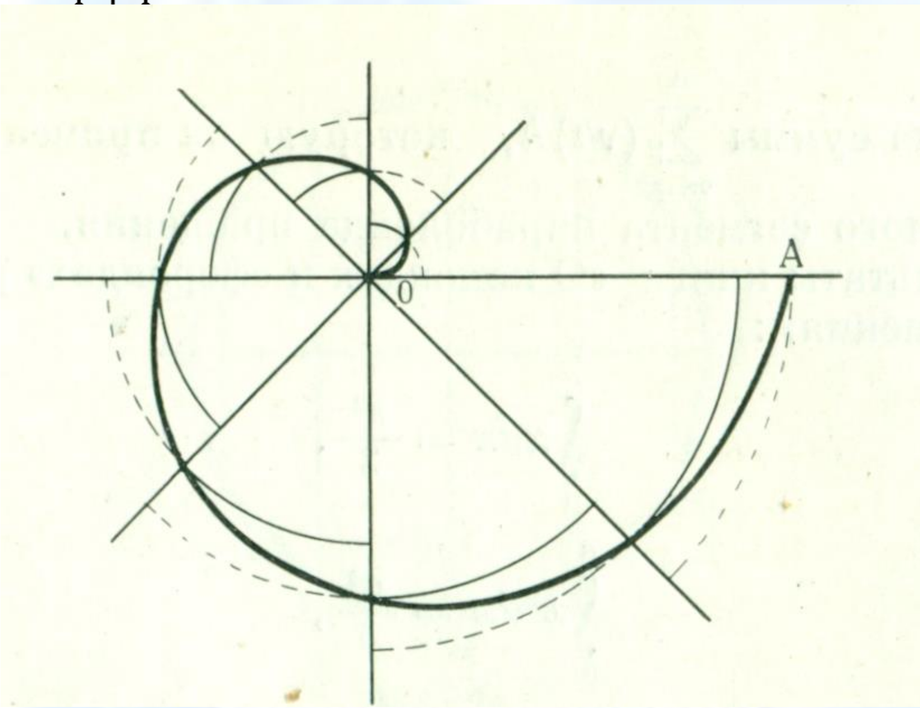
Условие задачи Архимеда состоит из двух частей. В первой части требуется решить в натуральных числах систему из семи линейных уравнений с восьмью неизвестными. К этой задаче Архимед дает такой комментарий:

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,
Нам раздельно назвав тучных быков число,
Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было,
Не назовет хоть никто в числах невеждой тебя,
Всё ж к мудрецам ты причислен не будешь.

Когда ответы первой части получены, условие второй части приводится к следующему виду: "Найти такое квадратное число, которое, будучи взято $M = 51\,285\,802\,909\,803$ раз, окажется равным некоторому треугольному числу". Об этой второй задаче Архимед говорит так:

Если ты это найдешь, чужестранец, умом пораскинув,
И сможешь точно назвать каждого стада число,
То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,
Что в этой мудрости ты всё до конца превзошел.

Архимед (287-212 до н.э.)



π

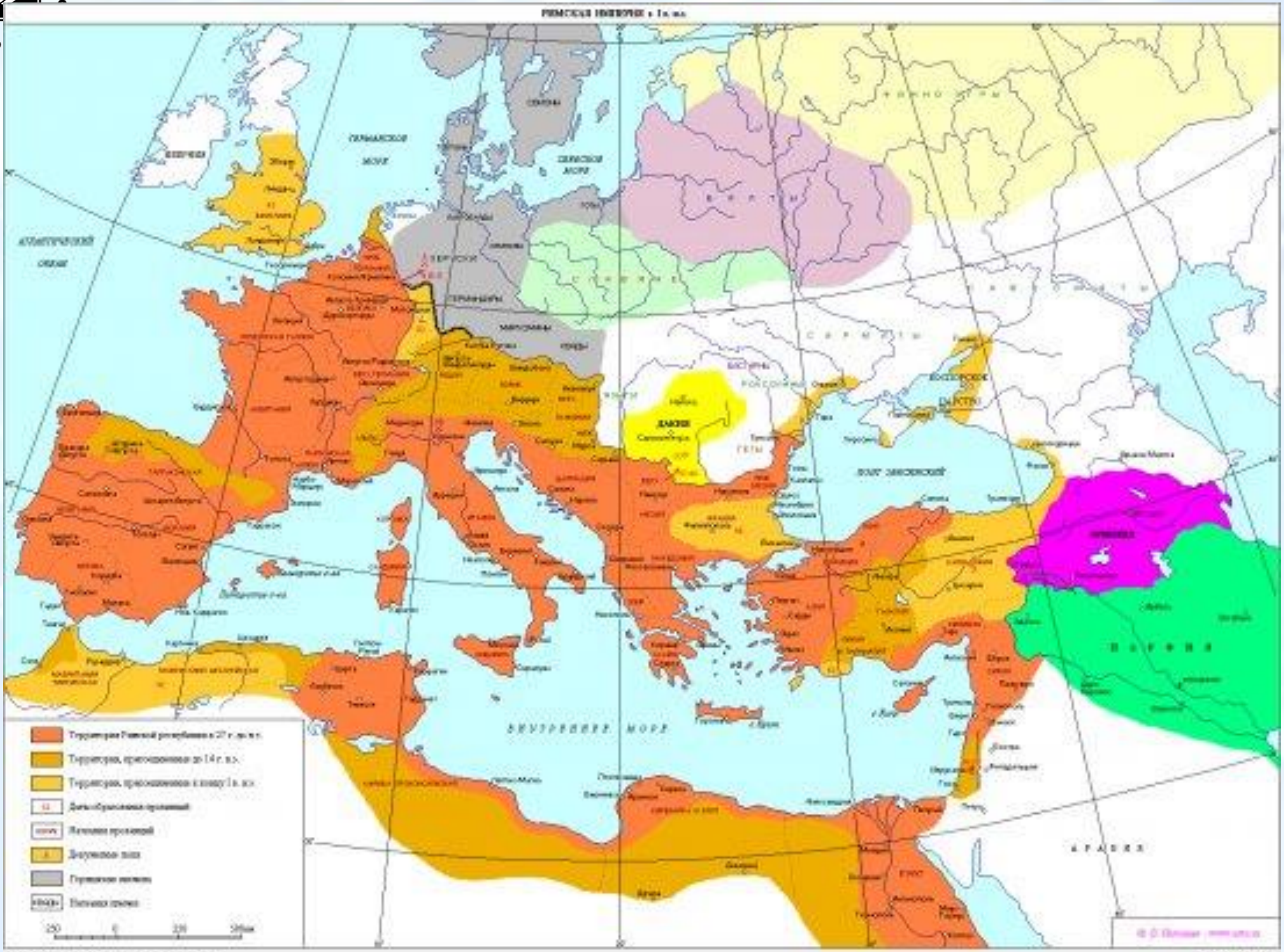
$$3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$$

$$\rho = a\varphi$$

$$\lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta\rho}{\rho\Delta\varphi}$$

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

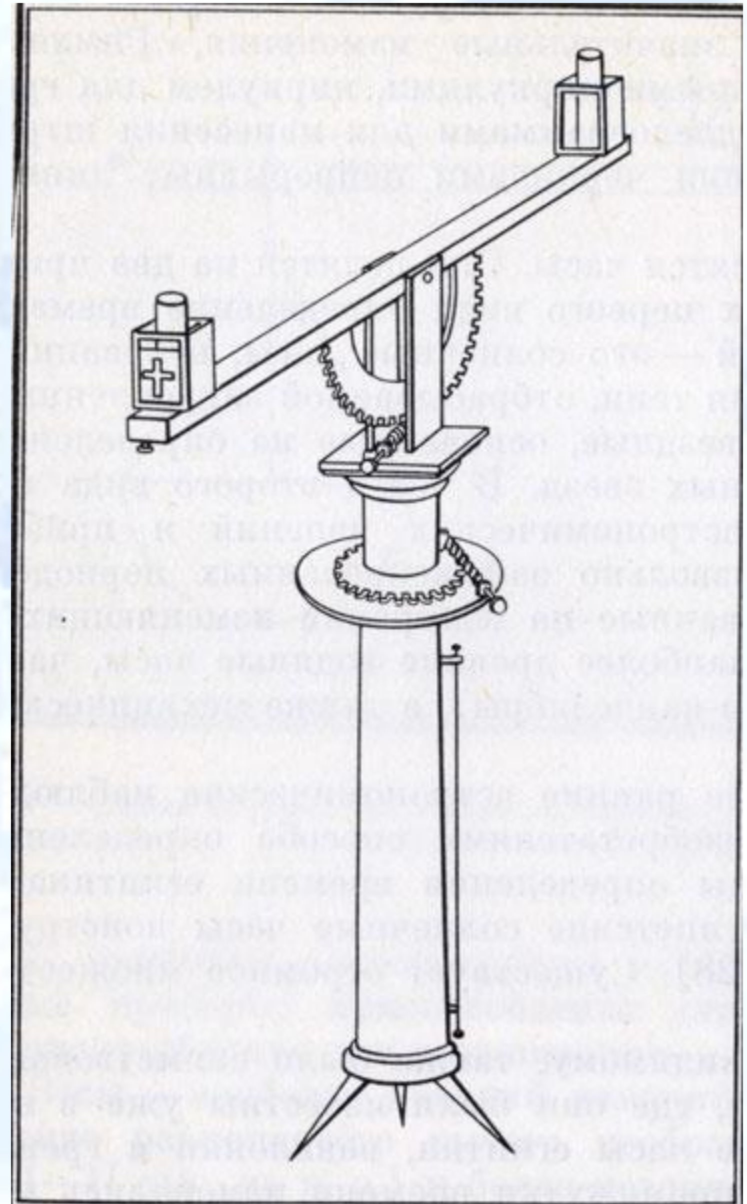
Римская империя



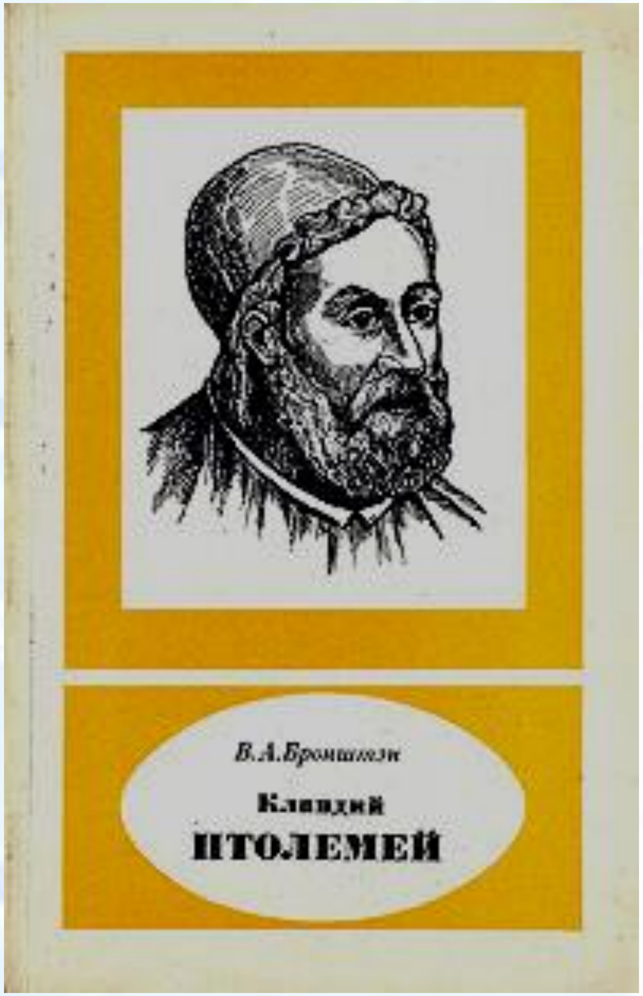
Гиппарх (ок.180/190 -125 до н.э.)

- Основы тригонометрии, таблица хорд (первый аналог тригонометрических таблиц)
- Наблюдения за звездным небом, звездный каталог (около 1000 звезд)
- Теория движения Луны и Солнца
- Географические координаты (широта и долгота)

Герон Александрийский (I в.)



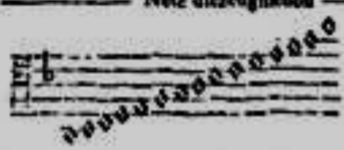
Клавдий Птолемей (ок.100 – ок. 165)



Клавдий Птолемей (ок.100 – ок. 165)

VII. *Mixolydius Tonus.*

Positiones.	Potestate.		
Nete hyperbolaeon	Nete diezeugmenon.		stans.
paranete hyperb.	Paranete diezeug.	Tetrachordum.	
trite hyperbolaeon	Trite diezeug.		
nete diezeugmenon	Paramese		stans.
		Tonus.	
paramese diezeug.	Mese		stans.
trite diezeugmenon	Lichanos meson	Tetrachordum.	
paramese	Parypate meson		
mese	Hypate meson		stans.
Lichanos meson	Lichanos hypaton	Tetrachordum.	
parypate meson	Parypate hypaton		
hypate meson	Hypate hypaton		stans.
		Tonus.	
lichanos hypaton	Nete hyp. & Prosl.		stans.
parypate hypaton	Paranete hyperb.	Tetrachordum.	
hypate hypaton	Trite hyperbolaeon		
proslambanomenos	Nete diezeugmenon		stans.



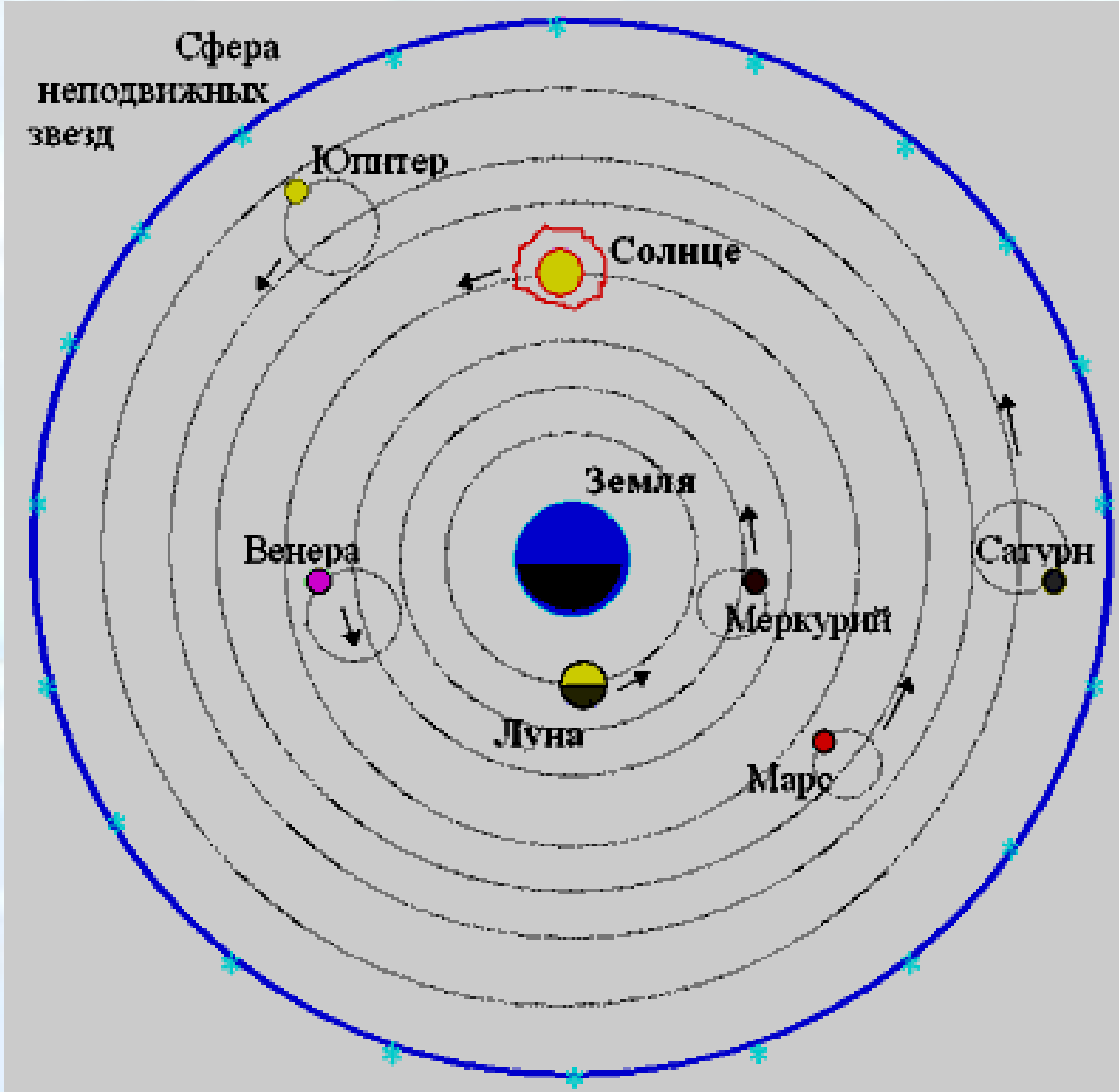
Post hasce Ptolemaei, de Tonis, Tabellas; libet hic subjungere (ex Meibomio, in Alypium, fere desumptum) Tonorum Schema (saltem pro genere Diatonico) ad eorum mentem qui Tonos (sive Modos) per Hemitonia continue adaugent: Quo ea, quae de his a Ptolemaeo dicuntur, rectius intelligantur.

Genus autem quod hic exhibetur, est Aristoxeni *Diatonum Intensum*; quod idem est cum Ptolemaei *Diatono Ditonico*; nisi quod, Ptolemaei Limma, habeant illi pro Hemitonio. Similia schemata pro Chromatico & Enarmonio, Meibomius itidem

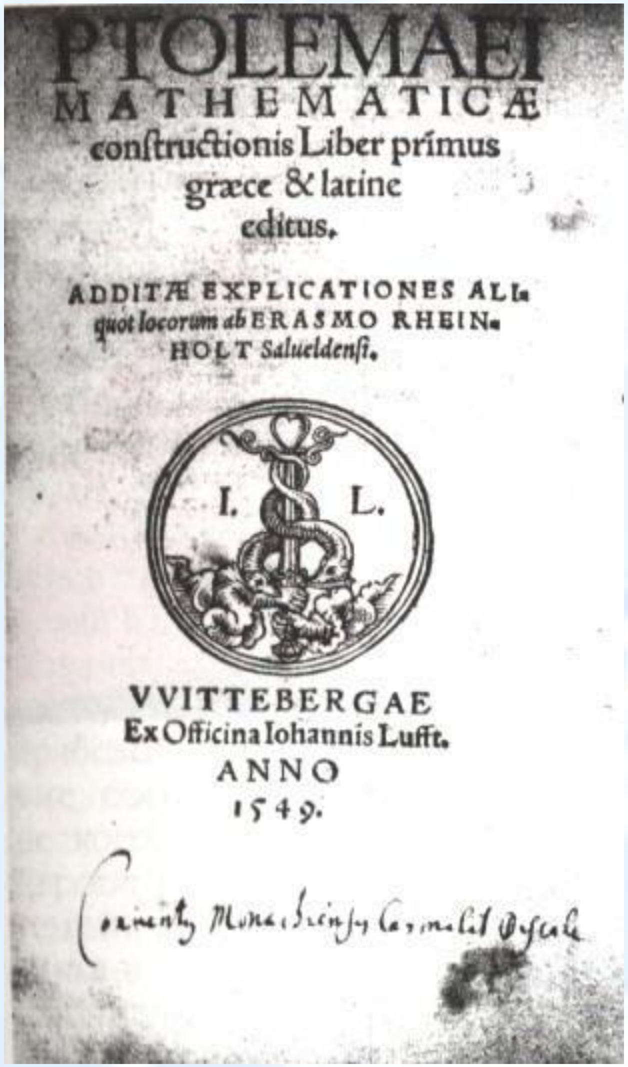
V

Ноты в «Гармониках» Птолемея (оксфордское издание 1682 г.)

Птолемей – теоретик гармонии (с гравюры Ж. Саважа)

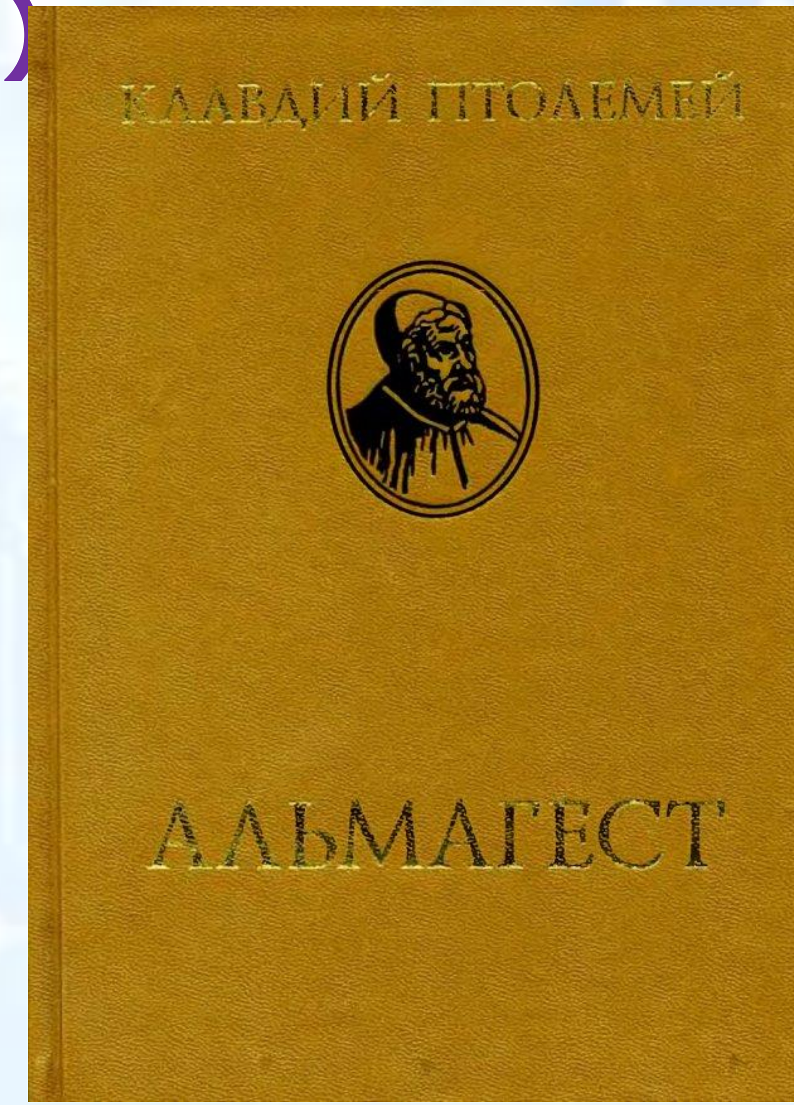

Сфера
неподвижных
звезд
Юпитер
Солнце
Земля
Венера
Сатурн
Меркурий
Луна
Марс

Клавдий Птолемей (ок.100 – ок. 165)


PTOLEMAEI
MATHEMATICÆ
constructionis Liber primus
græce & latine
editus.

ADDITÆ EXPLICATIONES ALIquot locorum ab ERASMO RHEINHOLT Salueldensi.

VVITTEBERGAE
Ex Officina Iohannis Lufft.
ANNO
1549.



Тригонометрия

Анаксимандр

Гиппарх

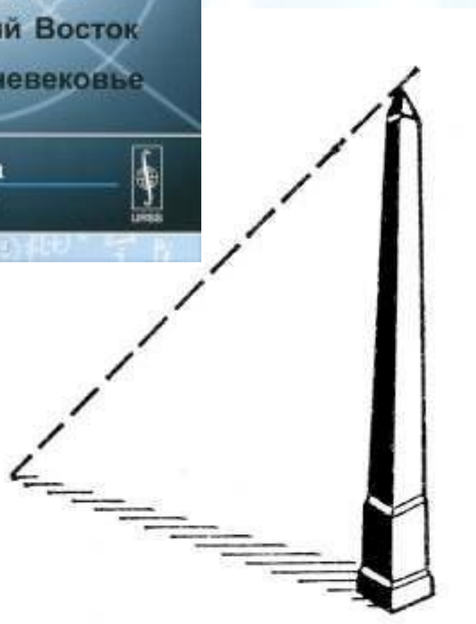
Фалес

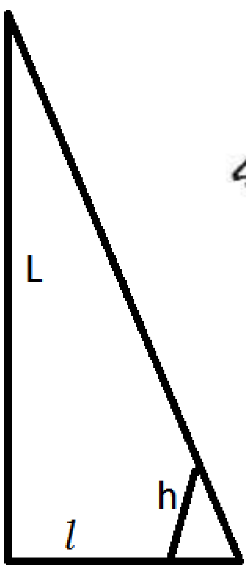
Автолик из Питаны

Евклид

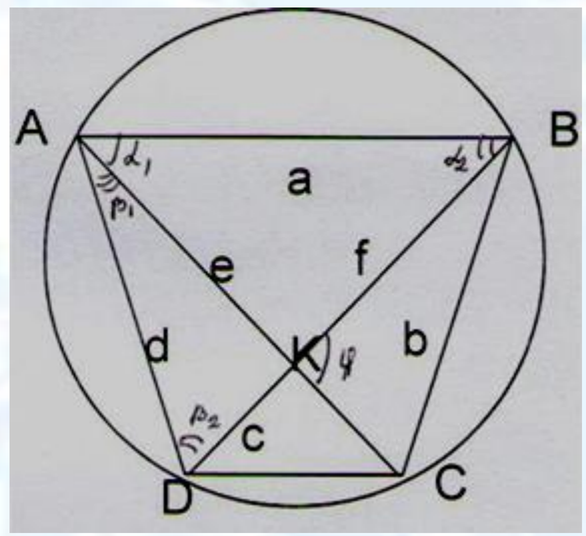
Теодосий

Менелай





$$tgh = \frac{L}{l}$$

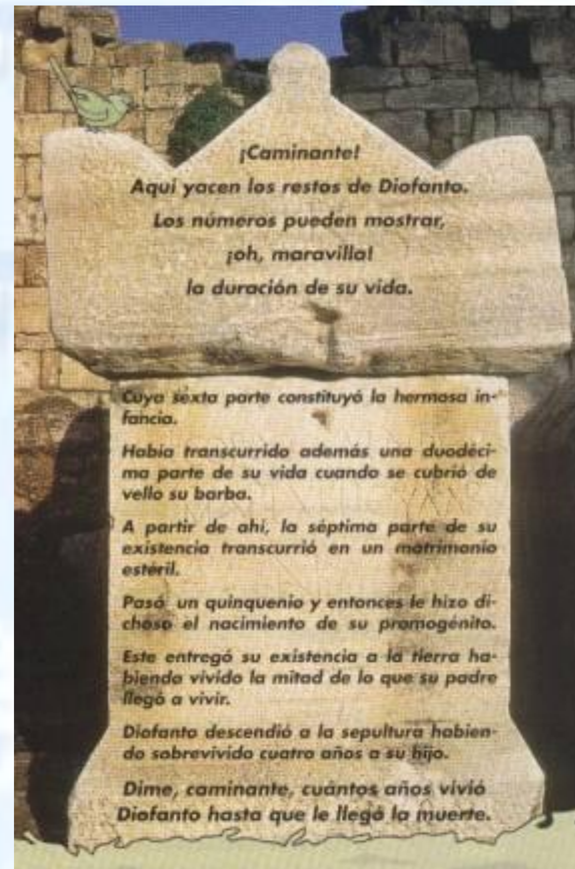


Теорема Птолемея

Прямоугольник, построенный на диагоналях вписанного в круг четырехугольника, равен сумме прямоугольников, построенных на противоположных сторонах.

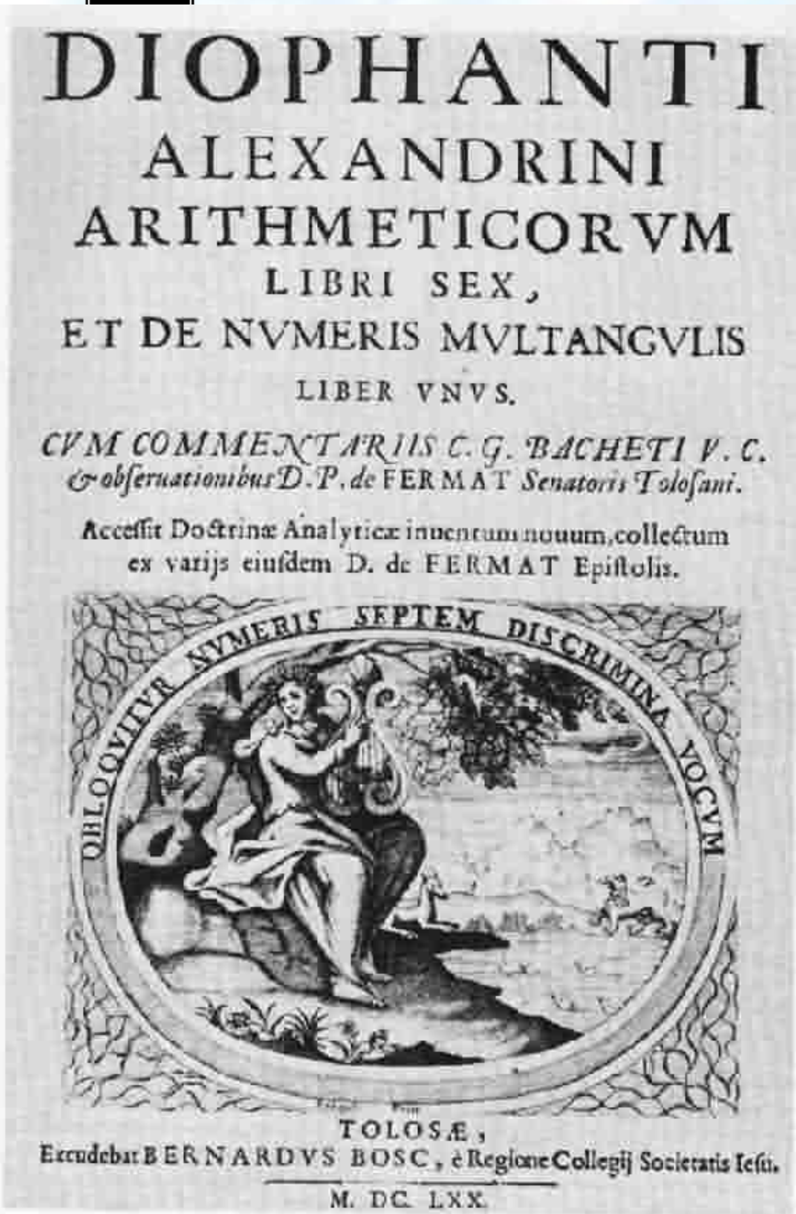
Диофант (III в.)

Прах Диофанта гробница покоит, дивись ей - и камень
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком,
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая, подружкою он обручился.
С ней пять лет проведя, сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе.
Тут и увидел предел жизни печальной своей



http://ega-math.narod.ru/Liv/Diophant.htm

Диофант (III в.)



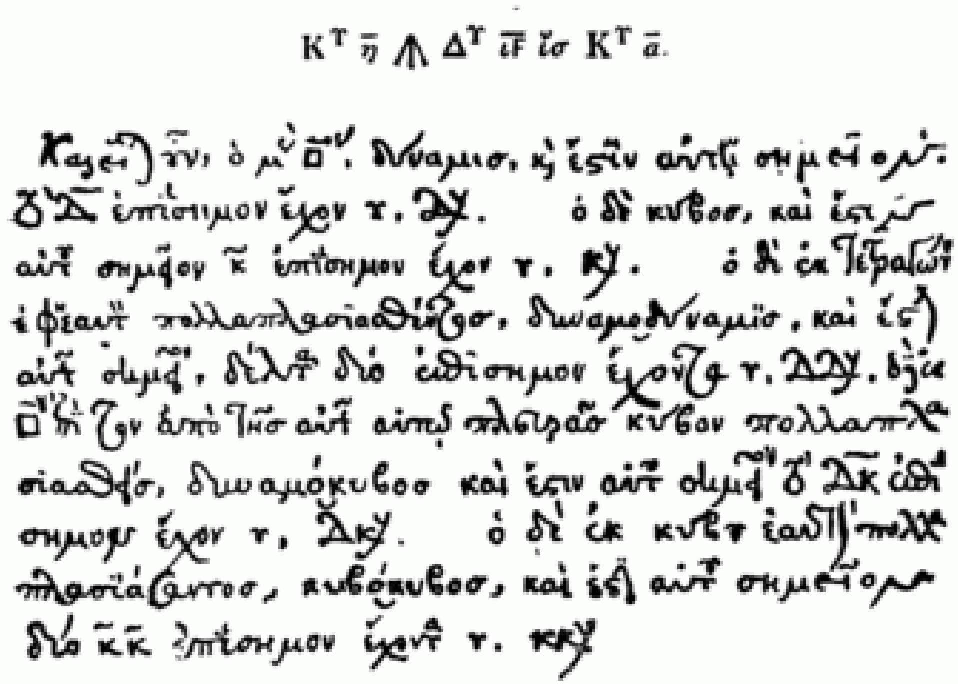
DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.

CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C. & obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.

Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

OBLOQVITVR NVMERIS SEPTEM DISCRIMINA VOCVM

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.



$$x^3 \cdot 8 - x^2 \cdot 16 = x^3$$

Диофант Александрийский. *Арифметика и книга о многоугольных числах.* Пер. И. Н. Веселовского; ред. и комм. И. Г. Башмаковой. М.: Наука (ГРФМЛ), 1974. 328 стр.

Диофант (III в.)

ς от ἀριθμός лат. numerus	число	соответствует нашему	x
Δ^{υ} от δύναμις лат. potentia	сила, степень	»	x^2
K^{υ} от κύβος лат. cubus	куб	»	x^3
$\Delta\Delta^{\upsilon}$ от δυναμοδύναμις	квадрато-квадрат	»	x^4
ΔK^{υ} от δυναμοκύβος	квадрато-куб	»	x^5
$K^{\upsilon}K$ от κυβοκύβος	кубо-куб	»	x^6
ι от ἴσος	равный	»	«=»
⋔		»	«—»*

* Знак вычитания или отрицательного числа.

$$x^m x^n = x^{m+n},\ x^m \frac{1}{x^n} = x^{m-n},\ \frac{1}{x^m}\frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^{m+n}},\ m,n,m+n \le 6$$

$$K^{\tilde{\upsilon}}\bar{\alpha}\zeta\bar{\zeta}\eta\chi\Delta^{\tilde{\upsilon}}\bar{\varepsilon}\overset{\circ}{M}\bar{\alpha}\iota\zeta\bar{\alpha}$$

$$x^3 + 8x - (5x^2 + 1) = x.$$

$$x + y = 2a, \qquad xy = b,$$
$$x + y = 2a, \quad x^2 + y^2 = b,$$
$$x - y = 2a, \qquad xy = b,$$

$$ax \pm by = c$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

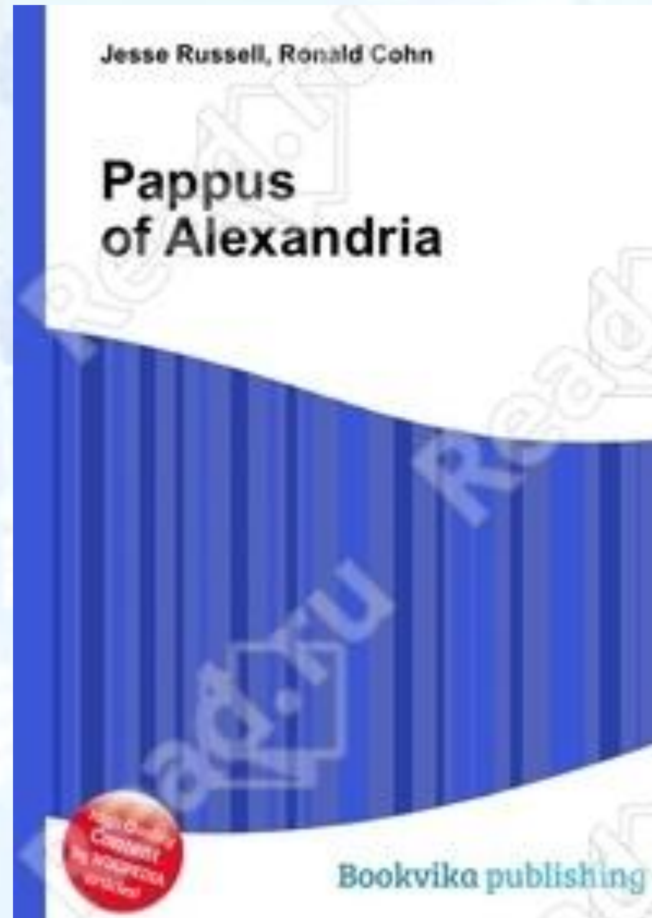
$$Ax^2 + Bx + C = y^2,$$

$$\left.\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= y^2, \\ dx^2 + ex + f &= z^2. \end{aligned}\right\}$$

Папп Александрийский (III – IV вв. н.э.)


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS,
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

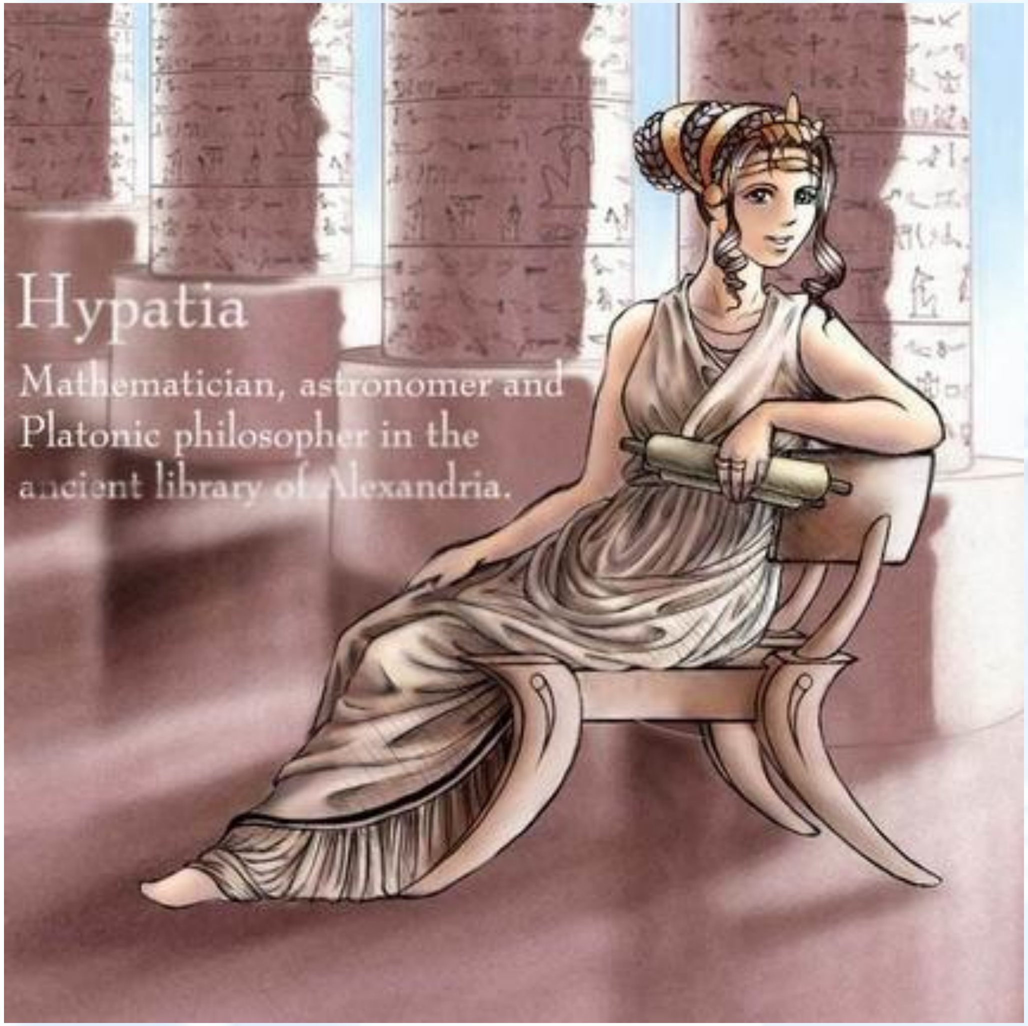
«Математическое собрание»
в 8 книгах



Теон Александрийский (ок 335 — ок 405)

Кадр из фильма «Агора» (2009, США-Испания)

Гипатия (Ипатия) ок. 370 – 415/418



Фили К. Гипатия: Жертва конфликта между старым и новым миром //Вопросы истории естествознания и техники, 2002, № 2

«Греки завещали потомкам две совершенно различные математические науки: с одной стороны – дедуктивную, систематически развитую и излагаемую, хотя и не свободную от ошибок, геометрию, с другой - эмпирическую арифметику и алгебру как ее обобщение» (М.Клайн)

Дополнительная литература

1. Сабо А. О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования // Историко-матем. исследования, в.XII. – М .: ГИФМЛ, 1959. – С. 322-392.
2. Башмакова И.Г. Лекции по истории математики в Древней Греции // Историко-матем. исследования, в.XI. – М .: ГИФМЛ, 1958. – С. 225-438.
3. Белозеров С.Е. Пять знаменитых задач древности. – Ростов-на-Дону: ИРУ, 1975.
4. Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. – М.: ГИФМЛ, 1959
5. Волошинов А.В. Пифагор. Союз истины, добра и красоты. – М.: Книжный дом «Либроком», 2010
6. Гарин И. Пророки и поэты. Т.7. – М.: Терра, 1995
7. Грушевицкая Т.Г., Садохин А.П. Концепции современного естествознания. – М.: Высш. шк., 1998.
8. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты. – М.: Мир, 1986
9. Диоген Лаэртский. О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов. – М.: Мысль, 1986
10. Кольман Э. История математики в древности. – М.: ГИФМЛ, 1961
11. Лосев А.Ф. , Тахо Годи А.А. Платон. Аристотель. – М.: Мол. Гвардия, 1993
12. Яновская С.А. Из истории аксиоматики // Историко-матем. исследования, в.XI. – М .: ГИФМЛ, 1958. – С. 63-96.

Спасибо за внимание!